

# I Teoremi di Nash-Moser

**Massimiliano Berti, SISSA**

*“Matematica come scoperta.  
Un tributo a Giovanni Prodi nel centenario dalla nascita”*

**Pisa, 5 Dicembre 2025**



...un regalo che ha avuto  
molta influenza sulla mia ricerca...

Le vendo copie che  
rimuove a me  
(ma un riportatore le vorrà)

6.  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE  
PISA  
CLASSE DI SCIENZE

G. PRODI - A. AMBROSETTI

ANALISI NON LINEARE

I QUADERNO

PISA - 1973

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI PRODI

## **I miei problemi**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.3, p. 395–410.*

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2011\\_1\\_4\\_3\\_395\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_3_395_0)>

... voglio dedicare questa occasione unica a parlare di progetti che non hanno avuto esito, o che hanno avuto esito molto parziale, di cui rimangono solo le carte di cui parlavo, destinate al cassonetto.

**12 dicembre 1995**

## 2. – I teoremi di esistenza di Nash-Moser

Il prof. L. Nirenberg è da tempo amico degli analisti italiani. Io avevo preso l'abitudine di intervistarlo, in occasione delle sue visite in Italia, approfittando anche del fatto che capisce l'italiano (mentre io sono totalmente negato alle lingue straniere). La domanda rituale era: “Professore, a Suo parere, qual è stata la più rilevante novità nell'analisi, in questi ultimi tempi?”. Ricordo che, in un anno che non riesco ad individuare – ma all'inizio degli “anni 60” – la sua risposta fu: “I teoremi di Nash-Moser” e si mise a descrivermi il nucleo principale di questa teoria, cosa che ora anche io cercherò di fare.



Immersione isometrica, 1956



KAM (KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER)  
in classe  $C^k$ , 61-‘67

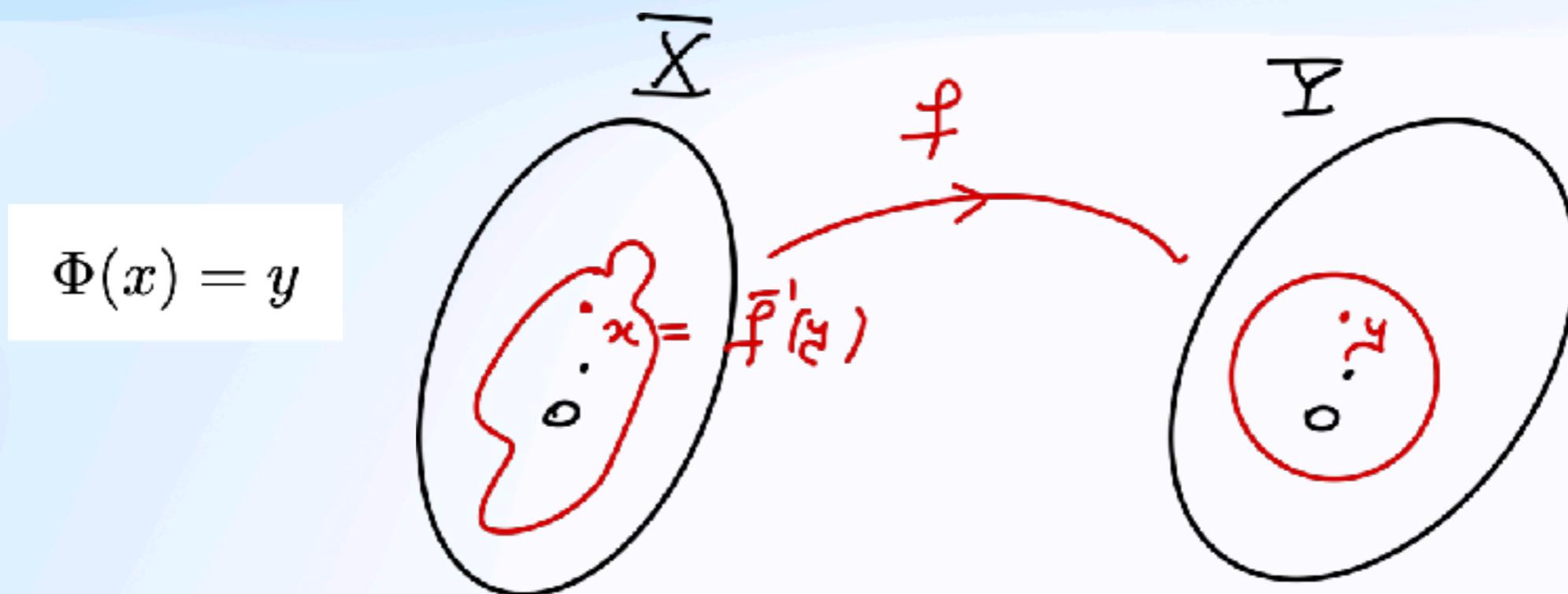
# Il teorema di inversione locale tra spazi di Banach

Siano  $X, Y$  spazi di Banach,  $U \subset X$  aperto in  $X$  contenente 0,

$$\Phi : U \subset X \rightarrow Y, \quad \Phi(0) = 0,$$

- **H1)**  $\Phi$  of class  $C^1$  in  $U$ ,
- **H2)**  $d\Phi(0)$  invertibile.

allora  $\Phi$  è localmente invertibile tra un intorno di 0 in  $X$  e un intorno di 0 in  $Y$ :



## dimostrazione

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(0)}_{=0} + \underbrace{d\Phi(0)}_{\text{invertibile}} x + \underbrace{Q(x)}_{O(\|x\|^2) \text{ quadratic}}$$

$$\Phi(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \underbrace{(d\Phi(0))^{-1}(y - Q(x))}_{=: \Psi(x)}$$

$\Psi(x)$  è una contrazione in  $B_r = \{\|x\| \leq r\}$  per  $r \ll 1$ , se  $\|y\| \ll 1$

$$\Psi : B_r \rightarrow B_r, \quad \|\Psi(x) - \Psi(x')\| \leq \lambda \|x - x'\|, \quad \lambda \in (0, 1)$$

$$x_0 = 0 \quad x_{n+1} = \Psi(x_n)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda \|x_n - x_{n-1}\|, \quad \lambda < 1, \quad \Rightarrow \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|$$

Schema iterativo “lineare”

Convergenza esponenziale

### 5.10. Esempio. Nell'equazione differenziale

$$(5.3) \quad - \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u + u^2 = f$$

Una applicazione

$\lambda$  è un parametro reale,  $f$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

Si cercano le soluzioni periodiche di periodo  $2\pi$ . Introduciamo i seguenti spazi (con le norme consuete):

$\mathcal{C}(2\pi)$  : spazio delle funzioni continue periodiche di periodo  $2\pi$ ;

$\mathcal{C}^2(2\pi)$ : spazio delle funzioni di classe  $\mathcal{C}^2$  periodiche di periodo  $2\pi$ .

L'applicazione  $\phi : u \rightarrow - \frac{d^2 u}{dt^2} + \lambda u + u^2$ , come applicazione

di  $\mathcal{C}^2(2\pi) \rightarrow \mathcal{C}(2\pi)$  è certamente di classe  $\mathcal{C}^1$  (anzi analitica, secondo una definizione che daremo più avanti). La derivata, calcolata in  $u$ , è l'applicazione:

$$v \rightarrow - \frac{d^2 v}{dt^2} + \lambda v + 2uv$$

Per  $u = 0$  essa risulta invertibile, non appena è  $\lambda \neq -k^2$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

Si può concludere: per  $\lambda \neq -k^2$ , se  $f$  è abbastanza piccola, l'equazione (5.3) ha una soluzione in  $\mathcal{C}^2(2\pi)$ . Tale soluzione è unica in un intorno abbastanza piccolo dell'origine.

# PUNTI CHIAVE

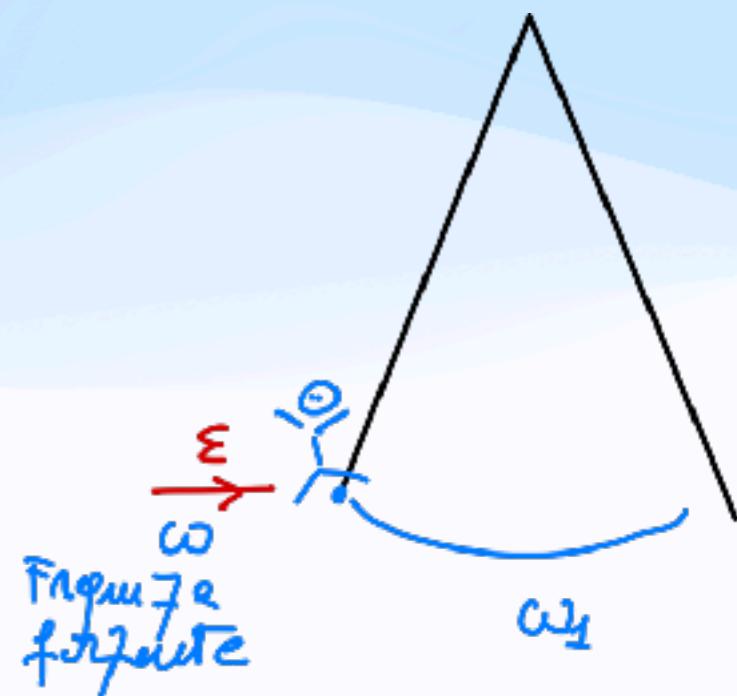
1) Condizione di “non-risonanza” : altrimenti fenomeno ALTALENA

$$\ddot{x} + k^2 x = \underbrace{\varepsilon \cos(kt)}_{2\pi\text{-periodica}}$$

Risonanza

Tutte le soluzioni sono illimitate

$$x(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) - \frac{\varepsilon}{2k} t \cos(kt)$$



2)

Matematicamente: l'operatore inverso guadagna 2 derivate:

$$d\Phi(0)^{-1} : C^0(\mathbb{T}) \rightarrow C^2(\mathbb{T}), \quad \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}),$$

un operatore continuo bigettivo tra X e Y di Banach ha **inverso continuo**

# Due casi in cui fallisce:

## 1) Forzante quasi-periodica

$$\ddot{x} + x + x^2 = \varepsilon f(\omega_1 t, \omega_2 t)$$

Soluzione  
quasi-periodica

$$x(t) = U(\omega_1 t, \omega_2 t), \quad U(\varphi_1, \varphi_2), \quad 2\pi\text{-periodico in } \varphi_1, \varphi_2$$

$$(\omega_1 \partial_{\varphi_1} + \omega_2 \partial_{\varphi_2})^2 U + U + U^2 = \varepsilon f(\varphi_1, \varphi_2)$$

## Operatore linearizzato in 0

$$\mathcal{L}U = (\omega_1 \partial_{\varphi_1} + \omega_2 \partial_{\varphi_2})^2 U + U \quad \mathcal{L}^{-1}f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} \frac{f_\ell}{-(\omega_1 \ell_1 + \omega_2 \ell_2)^2 + 1} e^{i\ell \cdot \varphi}$$

Operatore  
inverso in Fourier

$$-(\omega \cdot \ell)^2 + 1 \neq 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}^2, \quad \{-(\omega \cdot \ell)^2 + 1 \mid \ell \in \mathbb{Z}^2\} \text{ si accumula a zero}$$

$$|-(\omega \cdot \ell)^2 + 1| \geq \frac{\gamma}{\langle \ell \rangle^\tau}, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}^2, \quad \tau > 0,$$

$$\mathcal{L}^{-1} : H^s \rightarrow H^{s+\tau}$$

Operatore inverso perde  $\tau$  derivate

## 2) Dimensione infinita: equazioni alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon f(\omega t, u) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \end{cases}$$

$$u(t, x) \in \mathbb{R},$$

$$L^{-1} := \sum_{\ell \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}} \frac{f_{\ell,j}}{-(\omega \ell)^2 + j^2} e^{i\ell t} \sin(jx)$$

Inverso del linearizzato

# Approssimazione di irrazionali con razionali

Cosa ci sta sotto?



## Esercizi di ricapitolazione

\*1. Siano  $\alpha$  e  $\beta$  numeri reali  $> 0$  tali che  $\alpha/\beta$  sia irrazionale. Si dimostri che l'insieme  $\{m\alpha+n\beta : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$  è denso in  $\mathbb{R}$ . (Indicazione: si tenga presente anzitutto che l'insieme in questione è un sottogruppo di  $\mathbb{R}$ , pensato come gruppo rispetto all'addizione; preso poi un intero  $N > 0$ , si considerino gli elementi  $m\alpha+n\beta$ , con  $|m| < N$ ,  $|n| < N$ ; questi sono tutti distinti (perché?) e sono contenuti nell'intervallo  $[-N(|\alpha|+|\beta|), N(|\alpha|+|\beta|)]$ ; allora ve ne sono certamente due la cui distanza non supera

$$\frac{2N(|\alpha|+|\beta|)}{(2N+1)^2-1} = \frac{|\alpha|+|\beta|}{2(N+1)};$$

si prenda la differenza fra questi...)

Numeri diofantei  
Insieme di Cantor

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\gamma}{q^\tau}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$$

Misura piena se  $\tau > 2$

se  $\tau = 2$   
infinito non numerabile,  
misura nulla

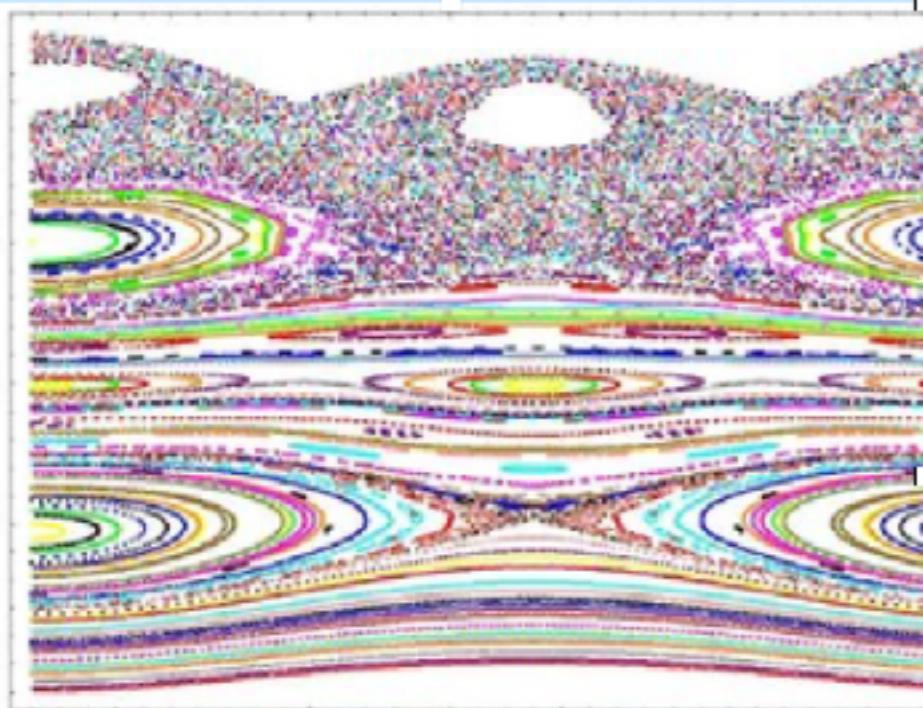
Esempio : la sezione aurea

$$x := (\sqrt{5} + 1)/2 \quad x = 1 + x^{-1}$$

$$[1, 1, 1, \dots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}$$

## Mondo dei “piccoli divisori”

## “quasi-risonanze”

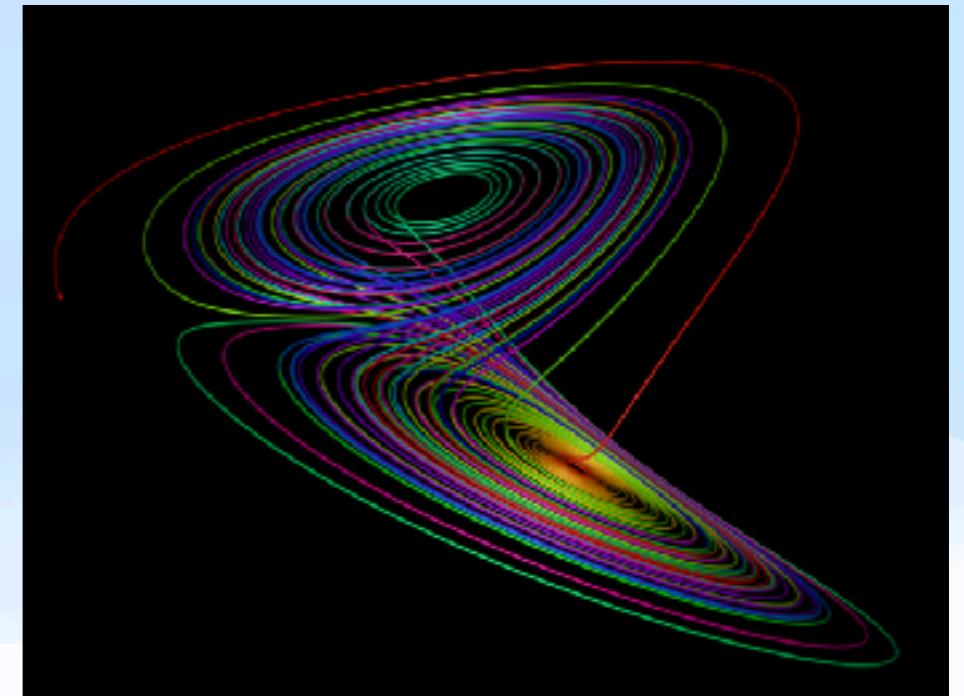


Moti caotici



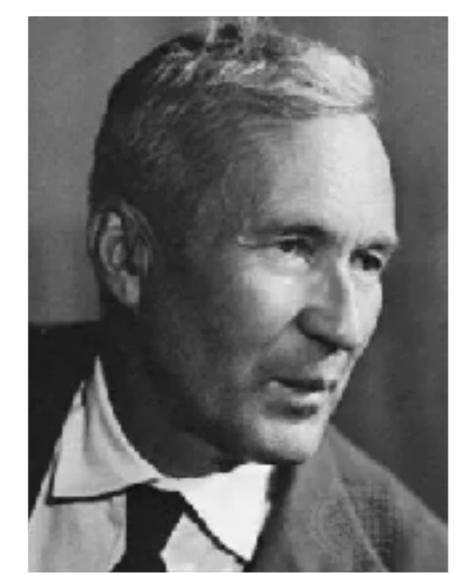
Poincaré

Teoria ergodica



Lo schema iterativo delle contrazioni non convergerà mai

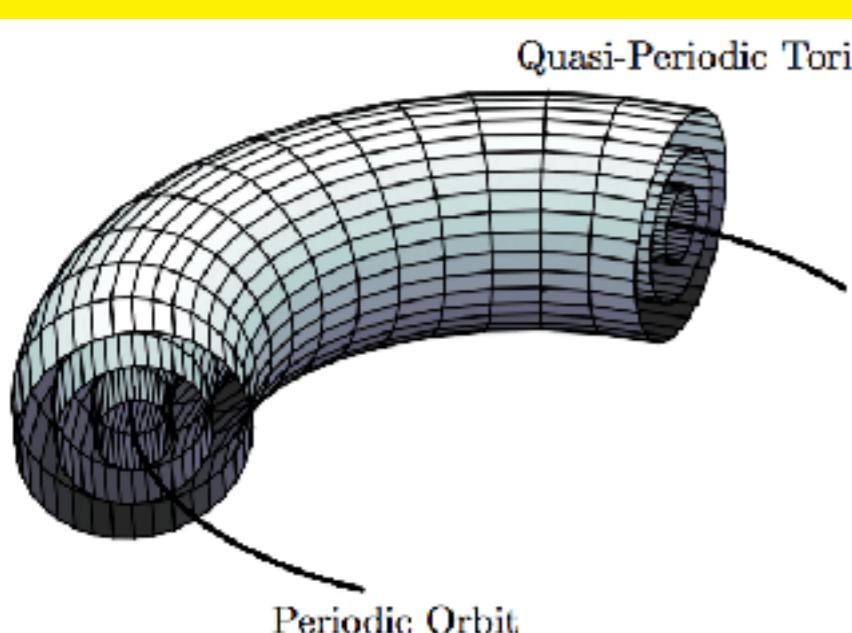
... si pensava che moti quasi periodici non potessero esistere se non in sistemi “integrabili”...



Kolmogorov

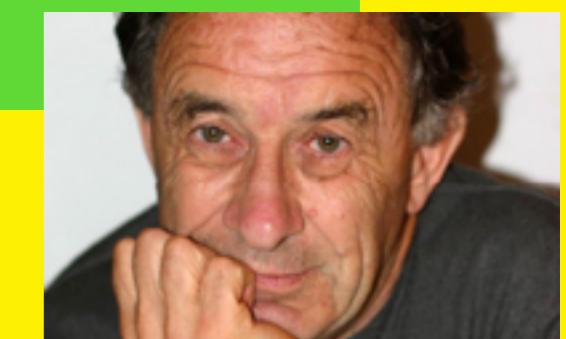
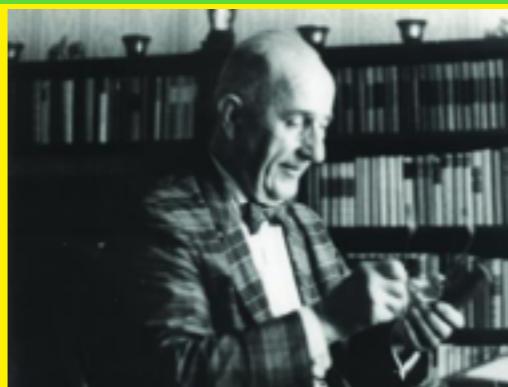
PROCEEDINGS  
OF THE  
INTERNATIONAL CONGRESS  
OF  
MATHEMATICIANS  
1954

Kolmogorov, A.N., Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique (French, 1957),  
*Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954*, Vol. 1, pp. 315–333,



Quasi-Periodic Tori  
Periodic Orbit  
Preservazione di  
moti quasi-periodici  
in sistemi Hamiltoniani  
quasi-integrabili ANALITICI

Siegel, 1943



Arnold, 1962

## Idea 1) metodo di Newton,

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} = x_n + (d\Phi(x_n))^{-1}(y - \Phi(x_n))$$

$$\Phi(x_{n+1}) - y = \underbrace{\Phi(x_n) - y + d\Phi(x_n)(x_{n+1} - x_n)}_{=0} + \mathcal{O}(\|x_{n+1} - x_n\|^2)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C \|x_n - x_{n-1}\|^2 \text{ “schema quadratico”}$$

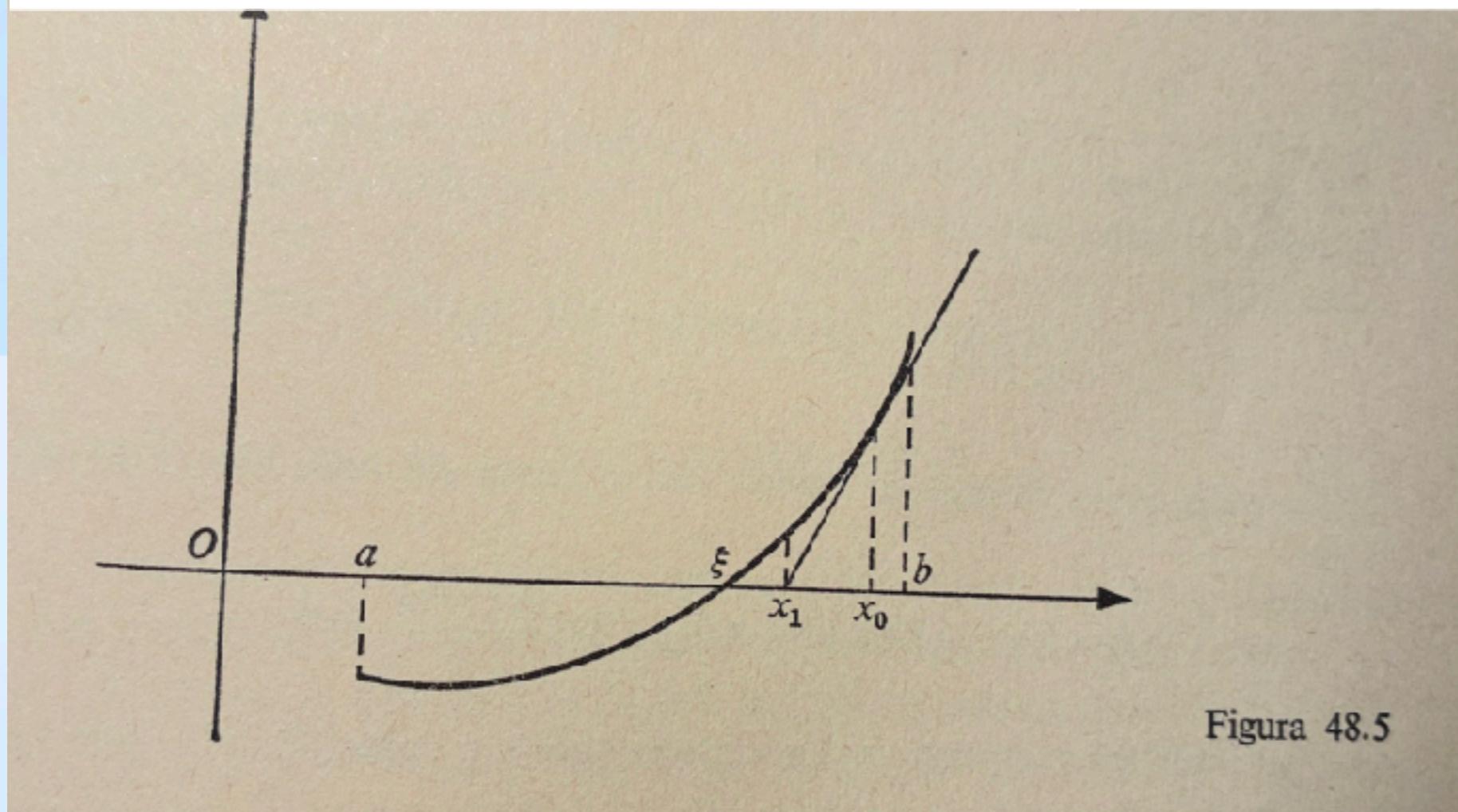


Figura 48.5



$$\varepsilon_n := C \|x_{n+1} - x_n\| \Rightarrow \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n^2 \Rightarrow \varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

convergenza super-esponenziale

## Idea 2) Kolmogorov

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C(n) \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

Converge anche se  $C(n) \rightarrow +\infty$

**Stimiamo l'operatore inverso illimitato ad esempio**  $\partial_z$

Disuguaglianze di Cauchy:

$$\|\partial_z f\|_{\sigma-\delta} \leq \frac{1}{\delta} \|f\|_{\sigma}$$

$$\|f\|_{\sigma} := \sup_{|z| < \sigma} |f(z)|$$

sup-norm

schema iterativo in cui stimiamo la n-esima iterata con meno analiticità

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \delta_n$$

$$\varepsilon_n := \|x_{n+1} - x_n\|_{\sigma_n}$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq Cd^n \varepsilon_n^2$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{\chi^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \chi \in (1, 2)$$

Schema iterativo Kolmogorov

convergenza super-esponenziale

Domanda: teoria KAM in classe  $C^\infty$  o addirittura in  $C^k$  esiste ?

.... Kolmogorov all' ICM 1954 rispose che pensava fosse falso !!

VERO!



1961-'67

- J. MOSER, *A New Technique for the Construction of Solutions of Nonlinear Differential Equations*. Proc. Nat. Acad. Sciences, Vol. 47, No. 11, pp. 1824-1831, 1961.  
J. MOSER, *On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. IIa, No. 1, 1962, pp. 1-20.

JÜRGEN MOSER

**A rapidly convergent iteration method and non-linear partial differential equations - I**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20, n<sup>o</sup> 2 (1966), p. 265-315*

e Nash?

# Geometria differenziale

Riemann

Gauss



Superfici immerse in

$\mathbb{R}^n$

Varietà  
riemanniana

$(M, g)$



Domanda: coincidono?

Problema:

$$u : M \rightarrow (\mathbb{R}^N, e), \quad e := \langle \cdot, \cdot \rangle$$

$$u^*(e) = g$$

$$\langle \partial_{x_i} u, \partial_{x_j} u \rangle_{\mathbb{R}^N} = g_{ij}$$

Si può ridurre a un problema  
di inversione locale

Linearizzato

$$\langle \partial_{x_i} u_0, \partial_{x_j} h \rangle_{\mathbb{R}^N} + \langle \partial_{x_i} h, \partial_{x_j} u_0 \rangle_{\mathbb{R}^N} = f_{ij}$$

Operatore inverso

$$\|h\|_{H^s} \lesssim_s \|u_0\|_{H^{s+2}} \|f\|_{H^{s_0}} + \|f\|_{H^s}$$

Non perde in  $f$  ma non guadagna 1 derivata e perde 2 derivate in  $u$ !

Ogni varietà riemanniana compatta  $(M, g)$  puo' essere immersa  
isometricamente con immersione liscia  
in qualche spazio euclideo  $\mathbb{R}^N$

$n = \dim(M), N \gg n, C^k$

Nash Annals 1956



# Moser scheme



In the construction invented by Nash  
the essential features are hard to isolate.  
we propose the following Newton scheme with smoothing

## Setting funzionale:

### Esempio: Scale di Spazi di Sobolev

$(X_s)_{s \geq s_0}$ , scale di spazi di Banach,

$$X_{s'} \subset X_s \quad \forall s' > s, \quad \| \|_s \leq \| \|_{s'}$$

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \left\{ u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k e^{ik \cdot x}, \quad u_k \in \mathbb{C}^m, \quad \|u\|_s^2 := \|u\|_{H^s}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |u_k|^2 \langle k \rangle^{2s} < +\infty \right\}$$

### Operatori “Smoothing” “regolarizzanti”

$$S_\theta : X_{s_0} \rightarrow X_\infty := \bigcap_{s \geq s_0} X_s \quad \theta \geq 1$$

$$\forall s \geq s_0, r \geq 0$$

$$(\mathbf{SM1}) \quad \|S_\theta u\|_{s+r} \leq C(s, r) \theta^r \|u\|_s, \quad \forall u \in X_s,$$

$$(\mathbf{SM2}) \quad \|(\text{Id} - S_\theta)u\|_s \leq C(s, r) \theta^{-r} \|u\|_{s+r}, \quad \forall u \in X_{s+r}$$

Mollificatori  
quantitativi

### Esempio:

$$u \in H^s(\mathbb{T}^d) \quad (S_N u)(x) := \sum_{|k| \leq N} u_k e^{ik \cdot x}$$

$\Phi : B_\delta \subset X_{s_0+d} \rightarrow Y_{s_0}$  di classe  $C^2$

$\Phi(0) = 0$

$$B_\delta := \{\|x\|_{s_0+d} < \delta\}$$

**H1) Stima “Tame”**

Per ogni  $s \in [s_0, S]$

$\Phi : B_\delta \cap X_{s+d} \rightarrow Y_s \quad d \geq 0$

Lineare in norma alta

$$\|\Phi(u)\|_s \leq C(s)(1 + \|u\|_{s+d}), \quad \forall u \in B_\delta \cap X_{s+d}$$

**Esempio:**

In  $H^s(\mathbb{T}^d)$  per ogni  $s \geq s_0 > d/2$

$$\|uv\|_s \leq C(s)(\|u\|_s\|v\|_{s_0} + \|u\|_{s_0}\|v\|_s)$$

$$\|u\|_{C^0} \leq C\|u\|_s \quad \forall s > \frac{d}{2}$$

$$\|u^2\|_s \leq C(s)\|u\|_{s_0}\|u\|_s$$

**Immersione di Sobolev**

**H2) Inverso destro con perdita di derivate, tame** Per ogni  $s \in [s_0, S]$

Per ogni  $u \in B_\delta \cap X^{s+\rho}$  esiste un inverso destro di  $d\Phi(u)$  soddisfacente

$$\left\| (d\Phi(u))^{-1}h \right\|_s \leq C(s) \left( \|h\|_{s+\rho} + \|u\|_{s+\rho}\|h\|_{s_0} \right)$$

$\rho \geq 0$  = perdita di derivate

# Teorema di Nash-Moser

Esiste  $S := S(d, \rho)$  tale per cui se le stime tame  $H1), H2)$  valgono in  $[s_0, S]$ , allora per ogni  $\|y\|_{s_0} < \varepsilon$  sufficientemente piccolo, esiste  $u \in B_\delta \cap X_{s_0+d}$  per cui

$$\Phi(u) = y$$

Difficoltà principale:

- 1) invertire linearizzato (è sufficiente a una soluzione)
- 2) provare che soddisfa stime tame

MOLTE VARIANTI POSSIBILI

## Idea dimostrazione



## Schema iterativo

$$x_0 := 0$$

$$x_{n+1} - x_n = -(d\Phi(x_n))^{-1} S_{\theta_n}(\Phi(x_n) - y)$$

$$\theta_n := \theta_0^{\chi^n}, \quad \theta_{n+1} = \theta_n^\chi, \quad \chi = \frac{3}{2}, \quad \theta_0 \geq 2.$$

$$\Phi(x_{n+1}) - y = \underbrace{\Phi(x_n) - y + d\Phi(x_n)(x_{n+1} - x_n)}_{=(I - S_{\theta_n})(\Phi(x_n) - y)} + \mathcal{O}(\|x_{n+1} - x_n\|^2)$$

“frequenze alte”

1) Stime tame (H2) per l'inverso implicano: “Divergenza controllata in norma alta”

$$\|x_{n+1}\|_S \leq \theta_n^{d+\rho}(1 + \|x_n\|_S)$$

$$\Rightarrow \|x_n\|_S \leq C(S)\theta_n^\alpha \quad \alpha = 2(\rho + d + 1) \quad \text{Indipendente da } S$$

2) Stime tame (H1) di  $\Phi$  + smoothing (SM2) implicano “Convergenza in norma bassa”

$$\|(I - S_{\theta_n})\Phi(x_n)\|_{s_0} \leq \theta_n^{-(S-s_0)} \|\Phi(x_n)\|_S \leq \theta_n^{-(S-s_0)} (1 + \|x_n\|_S) \leq C(S)\theta_n^{-(S-s_0)+\alpha}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = \|\Phi(x_n) - y\|_{s_0} \quad \text{satisfies} \quad \varepsilon_{n+1} \leq C(\beta) (\theta_n^{-\beta} + \theta_n^\rho \varepsilon_n^2), \quad \forall n \geq 0.$$

$$\beta \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_n \leq \theta_n^{-\mu}, \quad \forall n \geq 0.$$

# Molte applicazioni, molte varianti possibili

“Secondo Moser, il teorema di Nash-Moser non esisteva... Esiste una collezione di idee e tecniche a la Nash-Moser per affrontare problemi di funzione implicita con “perdita di derivate”...”



... legami con teoria della interpolazione, calcolo paradifferenziale...

notare che questi metodi furono applicati anche da P. Rabinowitz nella sua tesi relativa alle soluzioni periodiche di equazioni di tipo iperbolico. Attraverso questa tesi, che fu pubblicata sui *“Communications”*, entrammo in contatto scientifico e cominciò la nostra amicizia.



Water  
waves

P. Baldi, M. Berti, E. Haus, R. Montalto, “*Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth*”, INVENTIONES MATHEMATICAE, 214, 739–911, 2018.

M. Berti, L. Franzoi, A. Maspero, “*Pure gravity traveling quasi-periodic water waves with constant vorticity*”, COMMUNICATIONS IN APPLIED MATHEMATICS, Volume 77, Issue 2 990-1064, 2024,

M. Berti, R. Montalto, “*KAM for gravity capillary water waves*”, MEMOIRES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 263, 1273, ISSN 0065-9266,

Spazio delle fasi  
infinito  
dimensionale  
PDE quasi-lineari

2d  
Euler

M. Berti, Z. Hassain, N. Masmoudi, *Time quasi-periodic vortex patches*, INVENTIONES MATH, 233, PAGES 1279-1391, 2023.

M. Berti, P. Bolle, “*Quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations on  $\mathbb{T}^d$* ”, vii + 355, MONOGRAPHHS OF THE EMS, doi 10.4171/211

M. Berti, L. Biasco, M. Procesi, “*KAM theory for the Hamiltonian derivative wave equation*”, ANNALES SCIENTIFIQUES DE L’ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, Volume 46, fascicule 2, p. 299-371, 2013.

M. Berti, P. Bolle, “*Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on  $\mathbb{T}^d$  and a multiplicative potential*”, JOURNAL OF THE EUROPEAN MATHEMATICAL SOCIETY, 15, 229-286, 2013.

Wave equations  
in higher dim

M. Berti, P. Bolle: “*Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations*”, DUKE MATHEMATICAL JOURNAL, 134, issue 2, 359-419, 2006.

NLS higher dim

M. Berti, M. Procesi, “*Nonlinear wave and Schrödinger equations on compact Lie groups and homogeneous spaces*”, DUKE MATHEMATICAL JOURNAL, 159, 3, 479-538, 2011.

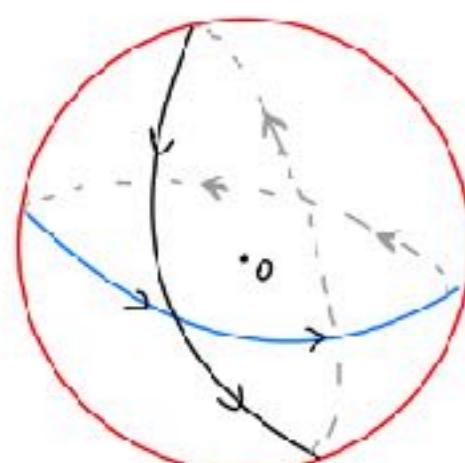
Soluzioni periodiche di fully nonlinear wave equations (Rabinowitz), solitoni water waves (Beale), global existence NLW su  $\mathbb{R}^d$  (Klainermann), Zehnder, Hamilton, ...

## Problemi di Cauchy per PDEs con derivate

Superfici Zoll magnetiche: esistono infinite metriche e forze magnetiche su  $T^2$  in cui tutte le geodetiche sono periodiche

L. Asselle, G. Benedetti, M. Berti, “Zoll magnetic systems on the two-torus: a Nash-Moser construction”, ADVANCES IN MATH., 452 (2024)

geometricamente: geodetiche con curvatura geodetica prescritta



Guillemin 1975 sulla sfera  $\mathbb{S}^2$ , flusso geodetico è Zoll

$$g(\tau) := (1 + \tau u + o(\tau))g_0, \quad |\tau| \ll 1, \quad u: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dispari}$$

$g_0$  metrica canonica

Origine di “perdita di derivate” :

il linearizzato è un “Fourier integral operator”

$$u(x + p(x)) = f(x)$$

Invertire composizione

$$x + p(x) = y \iff x = y + \check{p}(y)$$

$$u(x) + p(x) \underbrace{(\partial_x u)(x)}_{\text{illimitato}}$$

Non per serie di Neumann

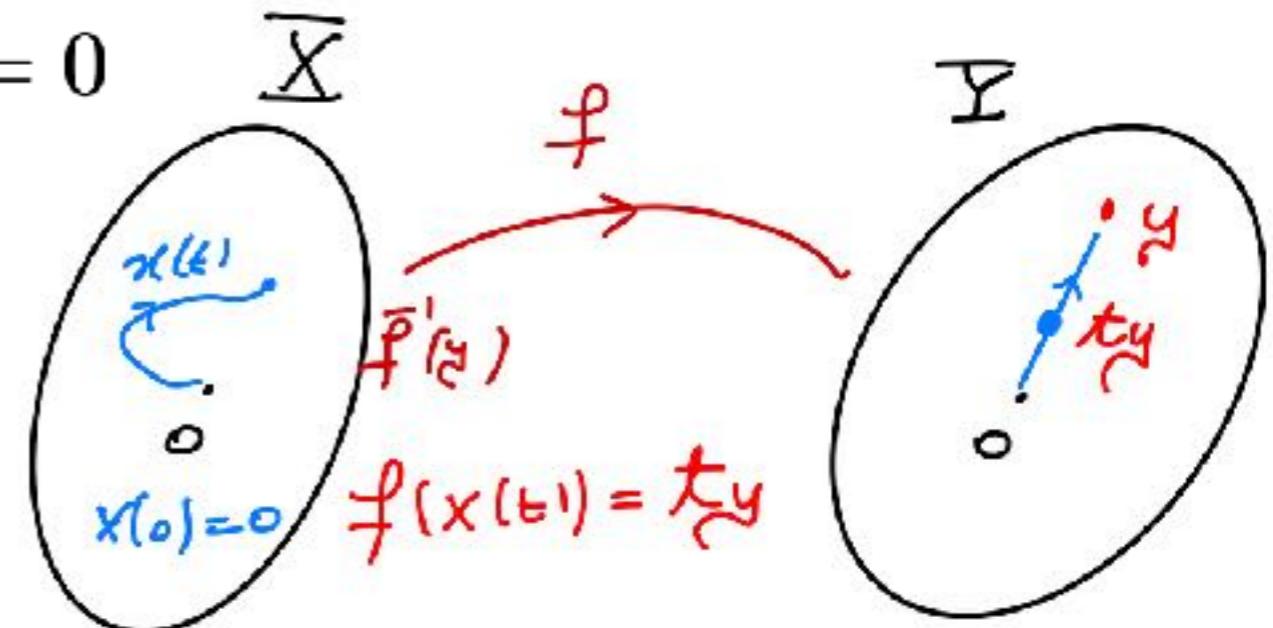
## approccio à la Nash-Hormander

Provare teorema di inversione locale con una equazione differenziale

$$\Phi(x(t)) = ty, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = 0$$

$$d\Phi(x(t))[\dot{x}] = y$$

$$\dot{x} = (d\Phi(x))^{-1} y, \quad x(0) = 0$$



nel caso l'inverso destro è illimitato va regolarizzato...

- 1) lo schema iterativo di Hormander algebricamente è sostanzialmente come Moser,
- 2) motivo della convergenza pare molto diverso... : converge molto lentamente!

Questa vicenda dei teoremi di Nash-Moser mi pare si presti bene per scoprire come possono andare le cose nella ricerca matematica. Anche in matematica si parte spesso da un fatto che non ha una vera spiegazione: qualcosa funziona e non si sa perché: da parte mia, ho sempre visto qualcosa di magico nei teoremi di Nash-Moser.

I TEOREMI DI NASH-MOSER...

...CONTINUANO A STUPIRE...

... LA MATEMATICA CONTINUA AD ESSERE UNA  
SCOPERTA...

*grazie della attenzione!*

