

Sulla congettura di Birkhoff per i biliardi kepleriani

Susanna Terracini
Università di Torino

lavoro in collaborazione con: Stefano Baranzini, Vivina Barutello, Irene De Blasi

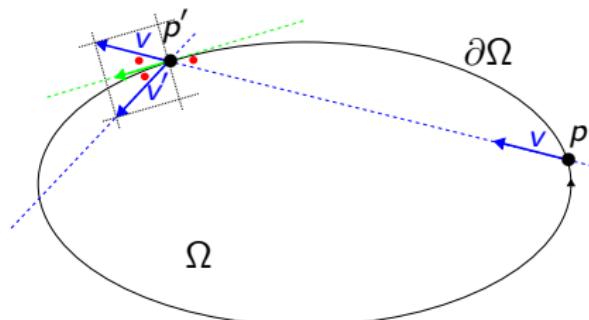
Una Giornata per Prodi
Pisa, 5 dicembre 2025

Biliardo matematico

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ strettamente convesso e limitato,
tavolo da biliardo
- $\partial\Omega$ bordo regolare

Biliardo matematico (o di Birkhoff)

Una particella puntiforme si muove liberamente (cioè a velocità costante) in Ω e subisce riflessioni elastiche quando incontra $\partial\Omega$

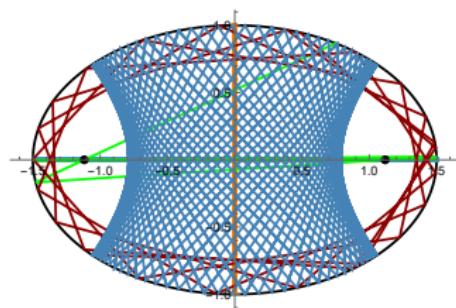
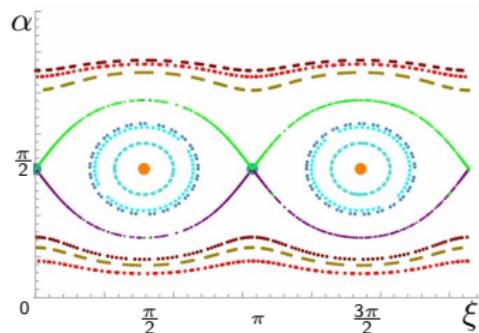


- $T: (p, v) \rightarrow (p', v')$, **la mappa di primo ritorno**
- possiamo descrivere T in coordinate (ξ, α) nello **spazio delle fasi** $\mathbb{S}^1 \times (0, \pi)$
 - ξ è il **parametro di ascissa curvilinea** di $\partial\Omega$: $\gamma = \gamma(\xi)$, $\xi \in \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, dove $L = \text{lunghezza}(\partial\Omega)$
 - $\alpha \in (0, \pi)$ è l'angolo che v forma con $\gamma'(\xi)$
- in queste coordinate, la mappa del biliardo T è una *twist map* che preserva l'area

Biliardi circolari ed ellittici

La dinamica dei biliardi di Birkhoff è particolarmente ben compresa nel caso di tavoli circolari ed ellittici, grazie alle loro peculiari proprietà geometriche e ottiche.

- **Caso circolare:** la mappa del biliardo si riduce a una rotazione rigida nello spazio delle fasi, α resta costante. Il sistema è globalmente integrabile, e tutte le traiettorie giacciono su circonferenze invarianti.
- Anche i **biliardi ellittici** presentano integrabilità completa: lo spazio delle fasi è globalmente foliato da curve invarianti regolari, ad eccezione di un'orbita 2-periodica e delle sue connessioni omocline.



- In entrambi i casi, l'esistenza di una famiglia di **curve invarianti** (e delle corrispondenti **caustiche** - curve rispetto alle quali le traiettorie rimangono tangenti sotto riflessione) è alla base della struttura integrabile

La congettura di Birkhoff-Poritsky

Una questione centrale nello studio matematico dei matematici è la seguente

Congettura [Birkhoff (1927), Poritsky (1950)]

Tra i domini piani, limitati, regolari e strettamente convessi, gli unici biliardi matematici integrabili sono quelli delimitati da ellissi.

- **Integrabilità** significa l'esistenza di un insieme di misura piena di curve invarianti nello spazio delle fasi, associate a una foliazione tramite caustiche.
- **La congettura generale è ancora aperta**, tuttavia recentemente sono stati dimostrati numerosi risultati parziali e teoremi di rigidità locale [Bialy (1993), Avila-De Simoi-Kaloshin (2016), Kaloshin-Sorrentino (2018), Huan-Kaloshin-Sorrentino (2018), Bialy-Mironov (2022)]

In un intorno delle ellissi, versioni locali della congettura sono state dimostrate in senso affermativo: piccole perturbazioni regolari di ellissi che rimangono integrabili devono essere ancora ellissi [Kaloshin-Sorrentino].

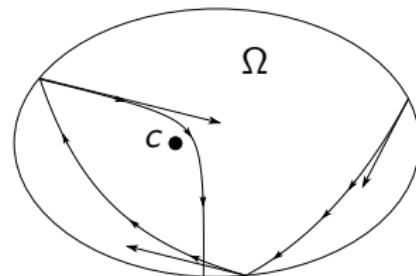
Biliardi kepleriani

- I biliardi matematici si estendono naturalmente ai **biliardi meccanici**: qui la particella si muove sotto l'azione di un campo di forze conservativo $F = \nabla V$ all'interno del dominio Ω , e si riflette elasticamente sul bordo
[Boltzmann, Fedorov, Gallavotti-Jauslin, Felder, De Blasi-Terracini, Pustovoitov, Robnik-Berry, Takeuchi-Zhao, Zhao]

Biliardi kepleriani

$$V(z) = \frac{\mu}{|z - c|}, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{c\}, \quad c \in \Omega \text{ è un centro fissato, } \mu > 0$$

- Tra due urti consecutivi, la particella percorre una **conica kepleriana**
- Ad ogni impatto con $\partial\Omega$, la traiettoria si riflette elasticamente e **l'energia totale si conserva**



Biliardi kepleriani

- Nel biliardo kepleriano compaiono naturalmente due parametri aggiuntivi rispetto al biliardo di Birkhoff:
 - la **posizione del centro** che agisce come **diffusore**
 - il **valore dell'energia totale**, h
- Su un dominio strettamente convesso, la mappa T è ben definita purché l'**energia h sia sufficientemente grande**

Comportamento asintotico dell'arco kepleriano

Quando $h \rightarrow +\infty$, un arco kepleriano converge al segmento o alla concatenazione di due segmenti passanti per c

- Usiamo la **regolarizzazione di Levi-Civita** per trattare la singolarità in c

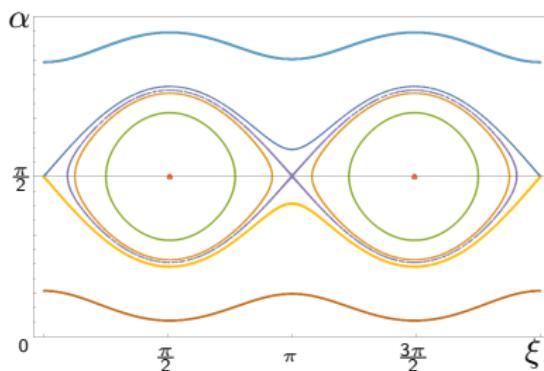
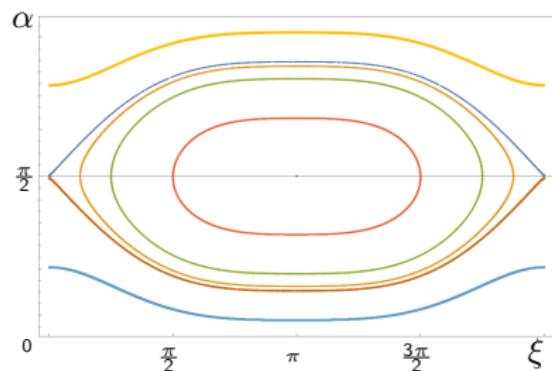
Un risultato di integrabilità per il biliardo kepleriano:

Teorema [Panov (1994)]

I biliardi kepleriani ellittici sono integrabili **a tutti i livelli di energia** quando il **centro di attrazione è posto in uno dei fuochi** dell'ellisse.

Integrabilità dei biliardi kepleriani con tavoli ellittici: un fenomeno di biforcazione

- Fissiamo il tavolo ellittico, la massa μ e la posizione del centro c in un fuoco
- **Facciamo crescere l'energia** da $h = 3$ (a sinistra) a $h = 150$ (a destra)



Teorema

Esiste un valore di transizione \tilde{h} tale che, per $h < \tilde{h}$, $(\pi, 0)$ è un centro, mentre per $h > \tilde{h}$, $(\pi, 0)$ è una sella e compare una coppia di punti 2-periodici.

Risultato principale

Problema

Esistono altri esempi di biliardi kepleriani regolari integrabili, oltre alle ellissi con il centro di attrazione in un fuoco?

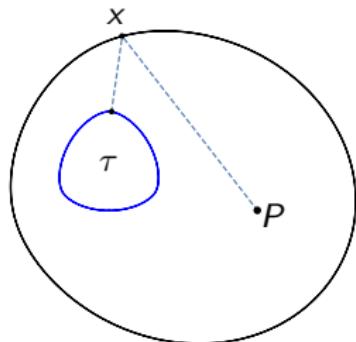
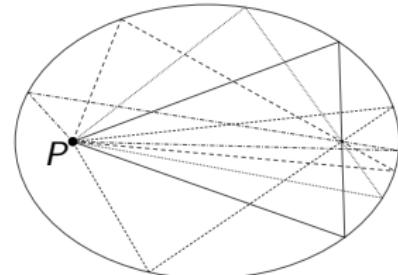
Teorema (Baranzini-Barutello-De Blasi-T. 2025)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio strettamente convesso e limitato, con bordo analitico. Allora, se $\partial\Omega$ non è un'ellisse e **tranne al più per una posizione del centro di attrazione**, il biliardo kepleriano in Ω **ammette una dinamica simbolica ad alte energie**. Se $\partial\Omega$ è un'ellisse, tali posizioni eccezionali sono due e coincidono con i suoi fuochi.

- Chiamiamo **punti focali** (di seconda specie) le posizioni del centro che non consentono l'applicazione del nostro Teorema principale. La ragione sarà chiara a brevissimo

Sull'esistenza di punti focali in domini non ellittici

- Se P è un punto focale di seconda specie, tutti i triangoli con un vertice in P e una riflessione elastica sul bordo soddisfano la condizione di riflessione elastica anche nel secondo punto di rimbalzo. Inoltre, questi triangoli hanno tutti lo stesso perimetro.

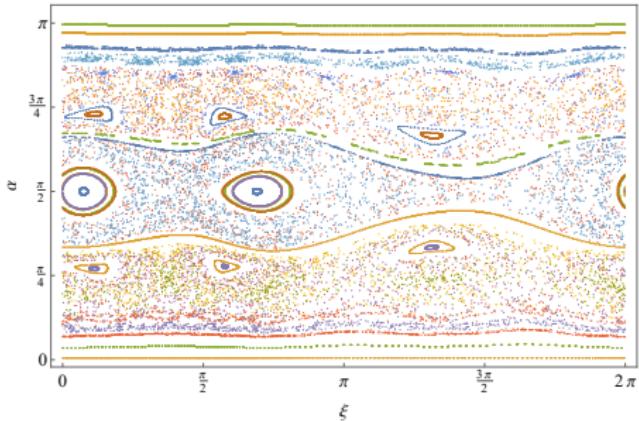


- Costruiamo **una famiglia di dimensione infinita di domini analitici non ellittici che ammettono un punto focale** (argomento di tipo *string* a partire da domini di *constant width* - Knill (1998)): la nostra costruzione fornisce famiglie di curve con punti focali arbitrariamente vicini a qualunque ellisse

Una congettura di Birkhoff-Poritsky per i biliardi kepleriani

Quando un centro attrattivo si trova in un punto focale, i nostri risultati non si applicano e non siamo in grado di stabilire se sia presente o meno una dinamica simbolica.

Simulazioni numeriche per un biliardo kepleriano non ellittico con il centro posto in un punto focale suggeriscono che il comportamento caotico persista anche in questa configurazione



Congettura

Tra tutti i domini $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ strettamente convessi, limitati e con bordo analitico, gli unici biliardi kepleriani che sono integrabili a tutti i livelli di energia sono le ellissi con il centro gravitazionale situato in uno dei suoi fuochi.

Entropia topologica positiva e non integrabilità analitica tramite dinamica simbolica

- Contrariamente ai lavori citati sull'integrabilità dei biliardi di Birkhoff, noi non identifichiamo regioni di instabilità tramite perturbazioni del biliardo di Birkhoff associato, lontano dal centro kepleriano

Identifichiamo invece un sottosistema che presenta una **dinamica simbolica** quando $h \gg 1$. Le traiettorie di tale sottosistema caotico presentano una sequenza di **incontri ravvicinati con il centro gravitazionale**, che agisce come diffusore

- La presenza di un sottosistema che ammette una dinamica simbolica:
 - implica **entropia topologica positiva**
 - esclude la **integrabilità analitica** (adattando un risultato classico di Kozlov (1983))
- A seconda della **geometria del dominio**, i simboli descrivono diversi tipi di incontri ravvicinati con il centro kepleriano
- Costruiamo traiettorie complesse che **seguono (shadowing)** concatenazioni bi-infinite di simboli

Sulla definizione di caos

Esistono molte possibili definizioni di caos. In effetti, non vi è accordo generale all'interno della comunità scientifica su cosa costituisca un sistema dinamico caotico. Tuttavia, ciò non ci impedirà di proporne una possibile definizione.

Questa definizione ha il vantaggio di poter essere facilmente verificata in numerosi esempi diversi e rilevanti. [...] vi sono molti sistemi dinamici che sono caotici ma che, nondimeno, possono essere completamente compresi.

[A first course in chaotic dynamical systems, Devaney, 1992]

Definition

Secondo Devaney, un **sistema dinamico** è detto **caotico** se:

- i suoi punti periodici sono densi;
- è *transitivo*;
- dipende sensibilmente dai dati iniziali.

Lo shift di Bernoulli come prototipo di sistema dinamico caotico

- Data \mathcal{S} un **insieme discreto e finito**, dotato della distanza banale $d_1(s_k, s_j) = \delta_{kj}$.
- Definiamo

$\mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \doteq \{(s_k)_{k \in \mathbb{Z}} : s_k \in \mathcal{S}, \forall k\}$ **sequenze bi-infinite di simboli**

allora $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ esso stesso uno spazio metrico con la distanza

$$d((s_k), (t_k)) \doteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4^{|k|}} d_1(s_k, t_k), \quad \text{per } (s_k), (t_k) \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}.$$

- Definiamo lo **shift di Bernoulli destro** come l'applicazione

$$\begin{aligned} B_r : \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \\ (s_k) &\longmapsto B_r((s_k)) \doteq (s_{k+1}) \end{aligned}$$

- Nel caso $S = \{0, 1\}$, gli **elementi di $S^{\mathbb{Z}}$** sono sequenze bi-infinite di zeri e uni:

$$(s_k) = (\dots, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \dots)$$

- I **punti periodici** approssimano qualunque elemento di $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$:

$$(s_k) = (\dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \quad \text{periodo 2}$$

$$(s_k) = (\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \dots) \quad \text{periodo 3}$$

- **B_r transitivo:** esiste un'orbita che passa arbitrariamente vicino a ogni altra orbita:

$$(s_k) = (\dots, 0, \quad 1, \\ \quad 0, 0, \quad 0, 1, \quad 1, 0, \quad 1, 1, \\ \quad 0, 0, 0, \quad 0, 0, 1, \quad 0, 1, 0, \quad 1, 0, 0, \quad 1, 0, 1, \quad 1, 1, 0, \quad 1, 1, 1, \\ \dots)$$

$(S^{\mathbb{Z}}, B_r)$ ha **entropia topologica strettamente positiva**: questo invariante topologico rappresenta il tasso di crescita esponenziale del numero di orbite distinguibili delle iterate della mappa e **misura la complessità complessiva del sistema**.

Dinamica simbolica

Definizione

Sia \mathcal{S} un insieme discreto e finito, $\Sigma \subseteq \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}$ un spazio metrico e $T: \Sigma \rightarrow \Sigma$ una mappa continua. Diciamo che il sistema dinamico (Σ, T) ha una **dinamica simbolica con insieme di simboli \mathcal{S}** se esiste un sottoinsieme T -invariante Π di Σ e una mappa continua e suriettiva $\pi: \Pi \rightarrow \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{T} & \Pi \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{B_r} & \mathcal{S}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

In altre parole, la restrizione $T|_{\Pi}$ è **topologicamente semiconiugata allo shift di Bernoulli destro B_r** .

- Se $T|_{\Pi}$ è topologicamente semiconiugata a B_r , allora **T ha entropia topologica strettamente positiva**;
- se π è anche iniettiva, cioè **se $T|_{\Pi}$ è coniugata a B_r , allora è caotica** (transitività - densità dei punti periodici - dipendenza sensibile dai dati iniziali).

Dinamica simbolica in meccanica celeste

- **Problema di Keplero anisotropo**

[Devaney, 1978]

- Problema degli ***N*-centri** con energie positive o leggermente negative, nel piano/nello spazio o su superfici, con potenziali isotropi o anisotropi

[Bolotin-Negrini, 2001-2003; Knauf and Knauf-Taimanov, 2002-2004-2005;
Soave-Terracini 2012; B.-Canneori-Terracini 2021, Baranzini-Canneori 2024]

- (alcune versioni del) **R3BP**

[Baldom -Giralt-Guardia, Guardia-Martin-Seara, Guardia-Paradela-Seara-Vidal, 2016-2022]

- **Biliardi galattici**: modello che nasce dall'astrofisica e descrive una particella che si muove in una galassia con un buco nero al centro

[B.-De Blasi-Terracini, De Blasi, 2023-2024]

Gli ingredienti principali per dimostrare l'esistenza di una dinamica simbolica sono

- **lo spazio metrico Σ** e $\Pi \subseteq \Sigma$;
- **la mappa di primo ritorno $T: \Pi \rightarrow \Pi$** ;
- **l'insieme dei simboli** in Π ;
- la dimostrazione della **continuità e suriettività di π** .

Schema della dimostrazione

Teorema (Baranzini-Barutello-De Blasi-T. 2025)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio strettamente convesso e limitato, con bordo analitico. Allora, se $\partial\Omega$ non è un'ellisse e **tranne al più per una posizione del centro di attrazione**, il biliardo kepleriano in Ω **ammette una dinamica simbolica ad alte energie**. Se $\partial\Omega$ è un'ellisse, tali posizioni eccezionali sono due e coincidono con i suoi fuochi.

- **Passo 1.** Descrizione della mappa di primo ritorno T tramite funzioni generatrici
- **Passo 2.** Esistenza di traiettorie topologicamente stabili per il problema limite
- **Passo 3.** Costruzione della dinamica simbolica

Passo 1. Descrizione di T tramite funzioni generatrici

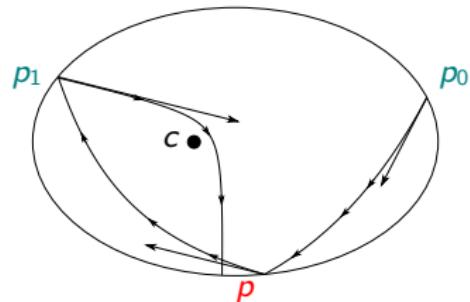
- Come nell'impostazione classica, la mappa T si descrive tramite opportune funzioni generatrici, che codificano la lunghezza di Jacobi degli archi kepleriani che connettono due punti

$$S(p_0, p_1) = L(z(\cdot; p_0, p_1; h)) = \int_0^T |z'(t)| \sqrt{\mathbf{h} + \mathbf{V}(z(t))} dt$$

- Fissati $p_0, p_1 \in \partial\Omega$, lasciamo variare $\mathbf{p} \in \partial\Omega$:
si ha

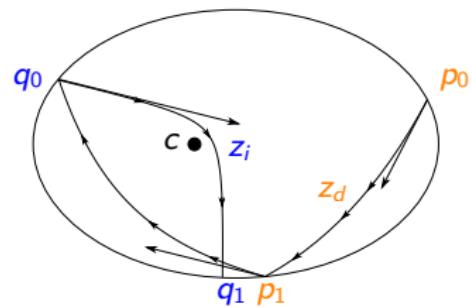
$$\frac{d}{dp} [S(p_0, \mathbf{p}) + S(\mathbf{p}, p_1)] = 0$$

se e solo se vi è un urto elastico in p



Passo 1. Descrizione di T tramite funzioni generatrici

- L'esistenza di due archi non omotopicamente equivalenti che congiungono una data coppia di punti motiva l'introduzione di una **funzione generatrice multivoca**: rami distinti di tale funzione definiscono T in regioni diverse dello spazio delle fasi
- Quando $h \rightarrow +\infty$, la lunghezza di Jacobi di un arco kepleriano converge alla lunghezza euclidea dei segmenti che uniscono gli estremi, eventualmente passando per il centro di attrazione



Lemma

$$L(z_d) = \sqrt{h} |\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1| + \frac{\mu}{\sqrt{h}} g_d(p_0, p_1; h),$$

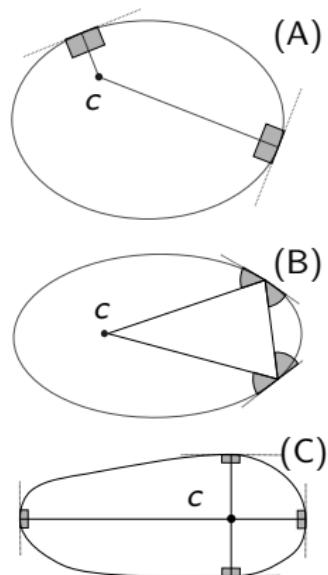
$$L(z_i) = \sqrt{h} (|\mathbf{p}_0| + |\mathbf{p}_1|) + \frac{\mu}{\sqrt{h}} \left(g_i(p_0, p_1; h) - \log \left(\frac{\mu}{2h} \right) \right),$$

Passo 2. Studio del problema limite, per $h \rightarrow +\infty$

- Questo comportamento asintotico motiva l'introduzione di una variante del biliardo classico di Birkhoff, che chiamiamo **biliardo di Birkhoff puntato**: le traiettorie partono da c e vi tornano dopo **uno o due rimbalzi** su $\partial\Omega$
- Studiamo le traiettorie **topologicamente stabili** del biliardo di Birkhoff puntato, che sono nei fatti **punti critici topologicamente stabili di opportune funzioni lunghezza**
- L'esistenza e la natura di tali oggetti dipendono dalla **geometria di Ω**

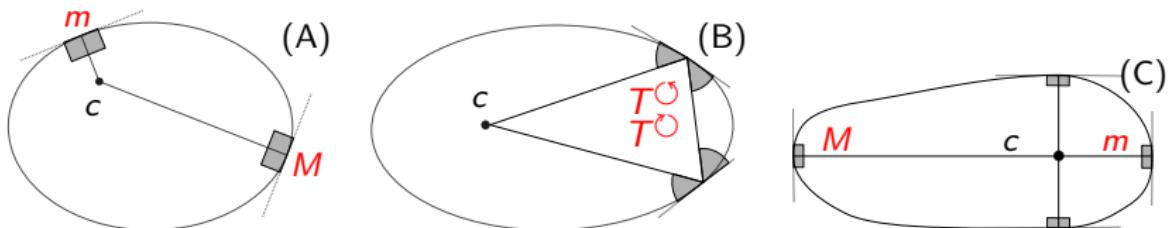
Teorema (Baranzini-Barutello-De Blasi-T. 2025)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio strettamente convesso e limitato, con bordo analitico. Allora, se $\partial\Omega$ non è un'ellisse e **tranne al più per una posizione del centro c** , si verifica una fra le situazioni (A), (B) o (C).



Passo 3. Costruzione della dinamica simbolica

- In ciascun caso (A)-(B)-(C) definiamo un **insieme di due simboli**



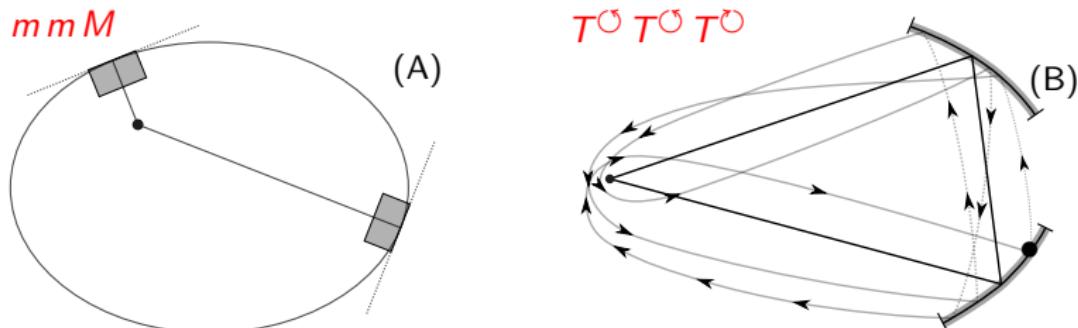
- Costruiamo **traiettorie periodiche** che *ombreggiano* le parole simboliche periodiche

Lemma (shadowing)

In ciascuna delle situazioni (A)-(B)-(C), se l'energia h è sufficientemente alta, data una qualunque parola periodica con due simboli esiste una traiettoria periodica per la dinamica completa che realizza tale parola.

Passo 3. Costruzione della dinamica simbolica

- L'esistenza di tali traiettorie si riduce al problema di trovare punti critici di una somma opportuna di funzioni generatrici
 - l'esistenza è garantita dalle proprietà di prodotto e di invariabilità per omotopia del grado topologico, applicate ai punti critici di una funzione lunghezza/perimetro
 - in generale, l'unicità non è garantita



Esempi di orbite periodiche che fanno shadowing

- Infine, estendiamo la costruzione a **traiettorie non periodiche**, tramite argomenti diagonali standard

Osservazioni finali sul Teorema principale

Teorema (Baranzini-Barutello-De Blasi-T. 2025)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio strettamente convesso e limitato, con bordo analitico. Allora, se $\partial\Omega$ non è un'ellisse e **tranne al più per una posizione del centro di attrazione**, il biliardo kepleriano in Ω **ammette una dinamica simbolica ad alte energie**. Se $\partial\Omega$ è un'ellisse, tali posizioni eccezionali sono due e coincidono con i suoi fuochi.

- Sotto ulteriori ipotesi su m e M , nel caso (A) possiamo dimostrare la **coniugazione topologica** con B_r
- quando il dominio rientra nella situazione (A), possiamo dimostrare gli stessi risultati anche per i **biliardi rifrattivi**
- l'**analiticità di $\partial\Omega$** è necessaria per dare una caratterizzazione completa di qualunque dominio piano strettamente convesso
- abbiamo bisogno di **$h > 1$** per costruire la nostra dinamica, ma le simulazioni numeriche mostrano la presenza di caos anche per piccoli valori di h

Bibliografia essenziale

Barutello V., De Blasi I., Terracini S., *Chaotic dynamics in refraction galactic billiards*, Nonlinearity, 36(8) (2023), 4209.

Barutello V., Cherubini A., De Blasi, I., *Exploration of Billiards with Keplerian Potential*, Nonlinearity, 38(5) (2025), 055004.

Baranzini S., Barutello V., De Blasi I., Terracini S., *On the Birkhoff conjecture for Kepler billiards* submitted 2025.