

Il contributo di Maria Alessandra Mariotti si trova in forma di articolo con il seguente riferimento:

Mariotti, M.A. (2025). Il progetto *Matematica come Scoperta* attraverso la lente della Trasposizione Didattica. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, Serie I, 10(3), 287–299.

Matematica come scoperta

Un tributo a Giovanni Prodi nel centenario dalla nascita

Pisa 5 Dicembre 2025



Il progetto Matematica come Scoperta attraverso la lente della Trasposizione Didattica

Maria Alessandra Mariotti
Università di Siena

Introduzione

Giovanni Prodi: un figura importante della ricerca matematica ... ha avuto un ruolo fondamentale per la nascita e per lo sviluppo della ricerca in Didattica della matematica; per me è stato ... il mio maestro





Matematica come scoperta di cosa parleremo

- Problema didattico: la costruzione di un percorso educativo per la Scuola Secondaria Superiore nel contesto della scuola italiana degli anni '60-70
- Analisi un progetto rispetto a scelte epistemologiche e didattiche

Prima metà del XX° secolo novità e profondi cambiamenti nella *pratica matematica*

“È raro nella storia vedere un cambiamento così veloce e totale della presentazione e insegnamento della matematica come quello indotto negli anni cinquanta nel novecento da Bourbaki.” (Lolli, 2022, p. 137)

➤ A livello universitario

- a partire dall'anno accademico 1961-62 : nuovo ordinamento per la laurea in matematica, e avvio del rinnovamento dei contenuti in linea con le nuove tendenze di origine burbakista, ...

➤ A livello pre-universitario

- Le istanze di rinnovamento erano ben presenti ai matematici italiani : nella speranza di un intervento ufficiale, convegni dibattiti , sperimentazioni pilota,...

(Linati, 2011 ; Furinghetti & Menghini, 2023)



Dai Programmi di Frascati ... ai Nuclei di Ricerca Didattica

Dopo gli "anni '50" divennero sempre più insistenti le proposte tendenti a migliorare l'insegnamento della matematica, particolarmente nella Scuola Secondaria Superiore, che non era stata toccata da alcuna riforma. Questi studi culminarono nei "Programmi di Frascati" degli anni 1966/67. La mancata attuazione di queste proposte [...] produsse un forte senso di frustrazione: risultava chiaro che dal Ministero della Pubblica Istruzione non ci si poteva attendere alcuna azione innovativa e che occorreva invece passare, in qualche modo, ad un'azione più diretta. Sorsero così, per iniziativa del C.N.R. e dell'U.M.I. i "Nuclei di Ricerca Didattica" ...

(Prodi, 1991)



Le istanze generali di rinnovamento

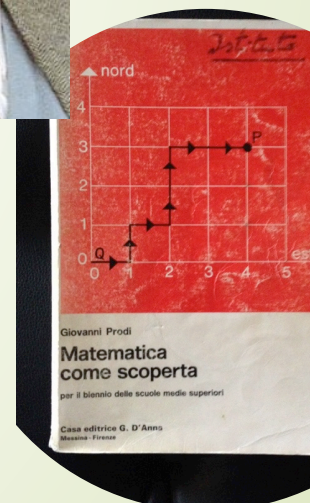
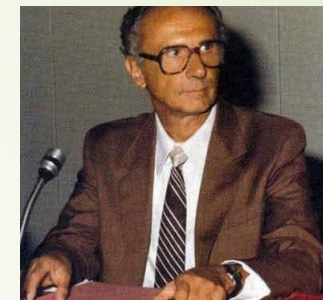
- Recuperare una posizione meno marginale per lo studio della matematica, e in generale degli studi scientifici.
- Innovare rispondendo alla **necessità di tener conto di quanto di nuovo** c'era stato e era in corso **nel campo della ricerca** .



I punti chiave del rinnovamento

- l'emergere prepotente **di nuovi ambiti di ricerca e come integrarli nei curricula:** probabilità, logica, informatica...
- i legami tra le diverse aree, della matematica, tradizionalmente trattate come separate, mostrando **la profonda unitarietà della Matematica**

La stagione di progetti



Matematica come scoperta

I diversi progetti prendevano in considerazione i punti chiave del rinnovamento e li elaboravano in modo personale

Quadri epistemologici e assunti didattici tra loro molto diversi

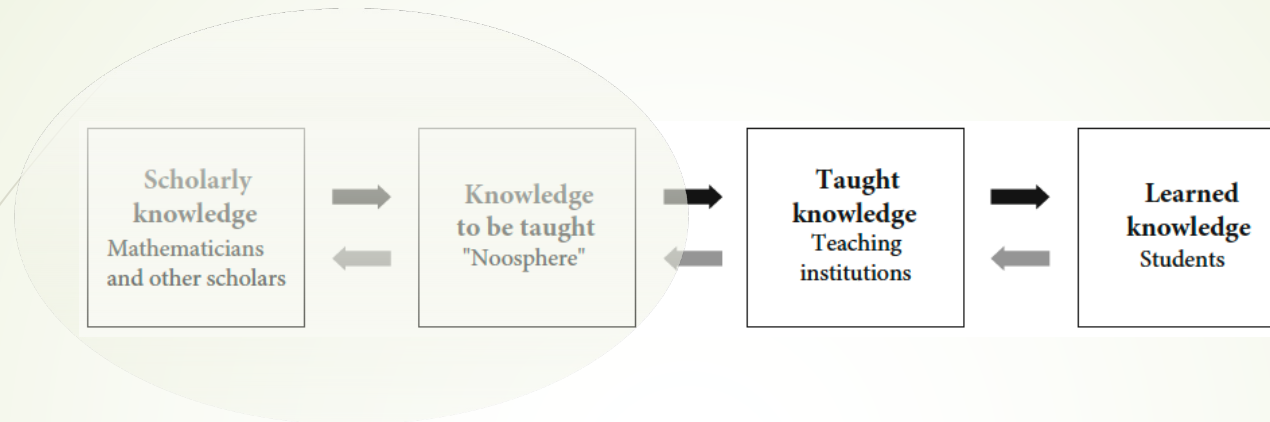
Analizziamo il caso di **McS**

Useremo le parole di Prodi e l'analisi delle sue scelte didattiche come emergono dal testo e dalla guida, riferendole ai punti chiave del rinnovamento

Applichiamo la lente della Trasposizione Didattica.



Trasposizione didattica



Il processo di trasposizione didattica si riferisce alle trasformazioni che un oggetto del sapere subisce dal momento in cui viene prodotto dagli esperti, fino al momento in cui viene selezionato e progettato per essere insegnato, fino a quando viene effettivamente insegnato (e appreso) in una determinata istituzione educativa

(Chevallard & Bosch, 2014).



Matematica come scoperta

un percorso per i 5 anni della SSS

A metà degli anni '70 prende forma il progetto *Matematica come scoperta*

“ La riforma dell'insegnamento della matematica non si può limitare ad aggiungere questo o quel capitolo, ma deve comportare un riesame completo delle mete formative, e quindi dei contenuti e della metodologia”
(Guida 1° vol., 1977, p. 2)



Innovare significava per Prodi

Costruire un percorso coerente che armonizzasse contenuti classici con una visione moderna, e introducesse contenuti nuovi la cui trattazione non era possibile procrastinare oltre, basti pensare alla probabilità la cui integrazione nei programmi era da tempo caldeggiata da molti.

- Quali scelte e quali trasformazioni dovevano essere messe in atto per innovare?




Due elementi caratterizzanti di un progetto ambizioso

Il progetto del percorso si basa su due
chiave:

- ***l'approccio per problemi***, che supera la separazione tradizionale tra ambiti diversi, e stabilisce nuove relazioni tra significati
- una ***organizzazione*** del sapere che risultasse ***unitaria e rigorosa*** (senza indulgere in inutili formalismi)



Superare la separazione
tradizionale tra ambiti
diversi



Il primo elemento: Approccio per problemi

“Si tratta certamente di un’idea non nuova, anzi spontanea [...]:
idea che POLYA ha espresso magistralmente e che è stata
espressa anche in Italia – citerò solo gli scritti di Bruno DE FINETTI.

Sono profondamente convinto che questo metodo di
insegnamento possa permettere di superare le difficoltà degli
allievi

...

senza cadere negli inconvenienti di certe presentazioni che
riducono la matematica ad un linguaggio rarefatto e privo di
contenuti.”

(Prodi, 1995)



L'approccio per problemi

So di dire cosa trita e ritrita affermando che il modo migliore di imparare la matematica è quello di farla concretamente, prendendoci gusto.

[...]

(Guida 1° volume, 1977, pag.3)

L'ispiratore è Polya, ma il riferimento non è tanto all'acquisizione di competenze euristiche, piuttosto al suo suggerimento

«occorre dare al ragazzo [nel suo lavoro di apprendimento matematico] il gusto della scoperta matematica» (Polya, 1970, p. 3)



Approccio per problemi: Riflessioni sul metodo

“Oggi si usa il termine “matematizzazione” per indicare questa attività di collegamento matematica – realtà. A livello elementare, questa attività si innesca quando si assume un problema nella sua forma più grezza, così come le circostanze o la nostra curiosità ce lo presentano.” (Prodi, 1977, p. 2)

Partire da problemi ‘grezzi’ ...

“la prima fase, quella che abbiamo chiamato appunto di *matematizzazione* è la più importante. Nell’insegnamento della matematica, ad ogni livello, i problemi dovrebbero costituire l’attività più importante e più ampia (parlo di *problemi autentici*, anche se semplici)” (Prodi, 1977, p. 282).



L'approccio per problemi: come si sviluppa nella ricerca in didattica della matematica

L'approccio per problemi nella ricerca in didattica della matematica

- Problem solving (Schoenfeld, 1987; 2007, ...): studio dei processi risolutivi, per favorire competenze generali nella soluzione di problemi, per studiarne le difficoltà ...(Zan, Di Martino, ...
- Modellizzazione (modelling) (Blum, 2002); Niss, 2012, ...): studio del rapporto

Realtà – Matematica

- Risolvere problemi e la costruzione di conoscenze ...



La centralità dei problemi nella costruzione delle conoscenze

- La posizione di Prodi si trova in sintonia con alcuni dei **costrutti teorici** più significativi della ricerca in Didattica della Matematica. Ne considererò solo due 'contigui'
- La teoria dei Campi concettuali (Vergnaud)
 - Definizione di campo concettuale come insieme di problemi, che per la loro soluzione richiedono una varietà di concetti, procedure e rappresentazioni simboliche strettamente connesse tra loro. ..
- La Teoria delle Situazioni didattiche (Brousseau)
 - La nozione di situazione a-didattica e di Ingegneria didattica

Punti chiave della TdS

La relazione tra situazione e problemi

- Les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation ».

In particolare emerge un 'problem'

- Esistono una o più strategie possibili, alcune delle quali inadeguate, basate sulle conoscenze precedenti degli allievi.

- Esiste un 'milieu di validazione', ovvero la struttura del milieu permette da sola di invalidare le strategie 'errate', in quanto inadeguate.

- La scelta dei dati è tale che non è possibile risolvere i problemi con strategie inadeguate e sia possibile risolverli con strategie adeguate, e soltanto per effetto della relazione del Milieu.

Una situazione

a-didattica

La nozione di
Ingegneria

La nozione
di variabile
didattica



Il secondo elemento:

Organizzazione unitaria e rigorosa

- Per l'analisi di come il progetto affronta il problema di **un'organizzazione dei contenuti unitaria e rigorosa** si prospettavano due piani diversi di complessità:
 - L'integrazione di ambiti nuovi per i quali non c'era una tradizione didattica consolidata
 - La rinnovamento di contenuti 'classici', per i quali invece si presentava il problema di come muoversi tra novità e tradizione.

L'innovazione rispetto a contenuti classici

la geometria

- Prodi si inserisce nel dibattito sulla scelta didattica di un'assiomatica ...

(E. Artin, G. Choquet e J. Dieudonné)

Da un dibattito accademico ad una scelta motivata ... Secondo precisi obiettivi didattici tra cui quello di offrire

“una descrizione matematica (e *perciò assiomatica*) di uno spazio, creando un primo schema che possa servire da supporto per lo studio dei fenomeni fisici. Da questo punto di vista, la geometria è il primo capitolo della fisica.” (Guida 1° vol. 1977 p. 178)

Riflessioni epistemologiche e didattiche

- La scelta è per una **assiomatica a base metrica** (Choquet):

«La funzione visiva ci offre già spontaneamente fatti che , dal **punto di vista delle strutture** matematiche, sono notevolmente complessi: cosicché spesso l'attività di apprendimento della matematica procede per semplificazioni di strutture (per “cancellazione” di dati di struttura presenti in un modello concreto) piuttosto che per “arricchimento” di strutture. Nel nostro caso occorre tenere presente che l'approccio metrico della Geometria non turba affatto l'utilizzazione spontanea delle strutture soggiacenti (struttura affine, struttura topologica, ...).»

(Guida 1° Vol, p. 179)

- La trasposizione didattica del **punto di vista delle strutture** ha prodotto una prospettiva completamente nuova per la concettualizzazione e poi per la formalizzazione dello spazio:

lo spazio non è più un contenitore vuoto di figure, ma è esso stesso elemento primo della formalizzazione ... che ne descriva la 'struttura'



Riflessioni epistemologiche e didattiche

La trasposizione della moderna prospettiva strutturale opta, però, per una assiomatica che meno si discosti dalla tradizione Euclidea.

L'elemento fondante è quello di isometria, la formalizzazione presenterà concetti e dimostrazioni di risultati classici della geometria elementare, usando la distanza e le isometrie.

Ad esempio confrontiamo le due definizioni della **relazione di perpendicolarità**

Una retta S si dice perpendicolare ad una retta R se è diversa da R e se viene trasformata in sé dalla simmetria di asse R

Due rette, AB e CD , che incontrandosi dividono il piano in quattro angoli uguali (retti) si dicono perpendicolari.

La distanza dalla tradizione, riguarda il riferimento a intuizioni diverse ...

La preoccupazione di mantenere un legame con l'esposizione classica è alla base della decisione di dimostrare i classici criteri di congruenza dei triangoli all'interno dell'assiomatica scelta, ma questo sarà solo più avanti nel 2° volume

L'innovazione rispetto a contenuti classici

L'algebra

- Come per la Geometria l'impostazione è quella assiomatica
- Le classiche proprietà delle operazioni assumono il ruolo teorico di assiomi di struttura
- Le strutture naturali sono introdotte per ampliamento:
da strutture più povere a strutture più ricche
- Ma non si arriva ad una definizione generale di struttura, rimandata al secondo volume (Cap. 19) ...



La complessità di un approccio assiomatico

- L'impostazione assiomatica (e strutturale) non è esplicitamente dichiarata.

MA

- si propongono compiti che chiedono di *dimostrare la validità* di alcune relazioni di uguaglianza tra espressioni algebriche
- I caratteri innovati forse non emergono immediatamente in tutta la loro portata.
- Difficile cogliere il ruolo *teorico* che vengono ad assumere le proprietà delle operazioni ...
- È PIÙ FACILE NOTARE CHE NEL TESTO CI SONO POCHI ESERCIZI PIUTTOSTO CHE SI TRATTA DI **ESERCIZI Diversi dal solito**

Procedurale VERSUS relazionale

Prodi sceglie chiaramente un **approccio relazionale** :

Forse ci si deve rendere conto che in matematica ci si occupa di relazioni che possono essere vere o false, e che non conviene impegnarsi a priori a scrivere solo relazioni " vere" (fra l'altro la verità dipende dal particolare sistema formale in cui ci si mette). Dunque non è proibito scrivere $0 = 1$; soltanto si dirà che questa relazione è falsa." (Guida 1° vol., 1977, pag. 154)

L'obiettivo di superare una concettualizzazione puramente procedurale è in sintonia con gli sviluppo della ricerca didattica nell'ambito dell'Algebra

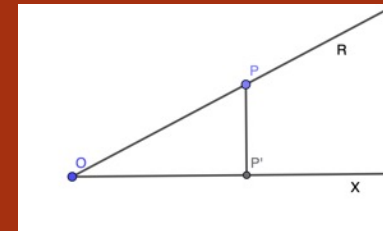
Le **espressioni algebriche** non solo come sequenza di operazioni da eseguire, ma **oggetti per il quali è possibile stabilire relazioni** (Sfard, 1991), in particolare una relazione di equivalenza, espressa dal simbolo di uguaglianza che le lega. (Kieran, 1981)

► La ricerca mostrerà le difficoltà concettuali inerenti ad un approccio puramente procedurale e le potenzialità di un approccio relazionale...

(Kiran, 1992; Carpenter et al. , 2003; Arzarello et al., 2012; Mariotti & Cerulli, 2002)

A9. (Assioma) Se \mathcal{X} e \mathcal{R} sono rette che si incontrano in O , indicando con P' la proiezione (ortogonale) di un punto P di \mathcal{R} su \mathcal{X} , si ha: $OP' = k OP$

Dove k è una costante (che viene detta **rapporto di proiezione**)



realizzato nella costruzione di por

- Uso di un ponte formale tra la geometria sintetica e la geometria analitica: il concetto di *rapporto di proiezione*

In sintesi i due elementi Significato e rigore

Il progetto è centrato sull'attività di risolvere problemi, si sviluppa in modo sistematico, genera conoscenze significative e coerenti. Si articola in due fasi.

- introduzione di un **campo di problemi**, per offrire la possibilità di generare significato, la base matematica.
- elaborazione degli **strumenti** e successivamente la loro **coerenza**

Analisi epistemologica

Individuazione di
un campo di problemi opportuni

Formalizzazione e
Organizzazione teorica
Ma

Esprimere il tutto in modo da
essere comprensibile



Dai progetti alla realtà

- Matematica come scoperta non ha avuto un gran successo ...
- Ma cosa ne è stato del rinnovamento che era al cuore e all'attenzione dei matematici quando McS nasceva ?

E adesso? Che dire e che fare rispetto ai cambiamenti nel campo della matematica, ma soprattutto nel campo dell'informatica ...

Un mondo affascinante che chiede ripensamento prima che rinnovamento

- La velocità o meglio la lentezza del processo di trasposizione trova difficoltà a rincorrere il progressi tecnologici
- TEMPO e STUDIO sono necessari : riflessione epistemologica e didattica per non perdere di vista il **senso della matematica**

Per concludere ancora le sue parole...

In questo momento può darsi che prevalgano in noi pensieri di preoccupazione o di delusione. Ma forse non è mai apparso così chiaro come ora il ruolo che il piccolo gruppo della didattica può avere sia all'interno della comunità matematica, sia nel più vasto campo della scuola e della società.

Questa persuasione deve aiutarci a procedere con impegno e con coraggio...

con ottimismo!





Grazie