Automorfismi di gruppi abeliani ordinati e logica positiva

Rosario Mennuni
lavoro in corso con Jan Dobrowolski

Università di Pisa

Università di Pisa
Seminario di logica
25 marzo 2022

In questo talk

ec, Aut, SOP

- Strutture esistenzialmente chiuse
- Automorfismi di strutture ordinate

Logica positiva

- Un crash course in logica positiva
- Generalizzare le linee di divisione

Automorfismi generici di strutture ordinate

- Ordini lineari
- Oag con automorfismo esistenzialmente chiusi

In questo talk

ec, Aut, SOP
- Strutture esistenzialmente chiuse
- Automorfismi di strutture ordinate

Logica positiva
- Un crash course in logica positiva
- Generalizzare le linee di divisione

Automorfismi generici di strutture ordinate
- Ordini lineari
- Oag con automorfismo esistenzialmente chiusi

Lavoro ancora in corso.

In questo talk

ec, Aut, SOP

- Strutture esistenzialmente chiuse
- Automorfismi di strutture ordinate

Logica positiva

- Un crash course in logica positiva
- Generalizzare le linee di divisione

Automorfismi generici di strutture ordinate

- Ordini lineari
- Oag con automorfismo esistenzialmente chiusi

Lavoro ancora in corso. Ogni commento è il benvenuto, *soprattutto* se vi accorgete che mi sto perdendo qualcosa di noto.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\ \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \models \exists y\ \varphi(a, y)$, allora $M \models \exists y\ \varphi(a, y)$.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K :=$ {strutture con età J} $\Longrightarrow$ Fr-lim(J) è ec in K.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \models \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K :=$ {strutture con età J} $\Longrightarrow$ Fr-lim(J) è ec in K.
- K *induttiva* := chiusa per unione di catene $\Longrightarrow$ ogni $A \in K$ si immerge in un $B \in K$ ec.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K := \{\text{strutture con età } J\} \implies \text{Fr-lim}(J)$ è ec in K.
- K *induttiva* := chiusa per unione di catene $\implies$ ogni $A \in K$ si immerge in un $B \in K$ ec.

Sia $K = \text{Mod}(T)$. Allora:

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \models \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \models \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K :=$ {strutture con età J} $\Longrightarrow$ Fr-lim(J) è ec in K.
- K *induttiva* := chiusa per unione di catene $\Longrightarrow$ ogni $A \in K$ si immerge in un $B \in K$ ec.

Sia $K = \mathrm{Mod}(T)$. Allora:

- K induttiva $\iff$ T è $\forall\exists$-assiomatizzabile.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K :=$ {strutture con età J} $\Longrightarrow$ Fr-lim(J) è ec in K.
- K *induttiva* := chiusa per unione di catene $\Longrightarrow$ ogni $A \in K$ si immerge in un $B \in K$ ec.

Sia $K = \mathrm{Mod}(T)$. Allora:

- K induttiva $\iff$ T è $\forall\exists$-assiomatizzabile.
- T model-completa $\iff$ ogni $M \in K$ è ec in K.

Strutture esistenzialmente chiuse

Per tutto il talk: $a, x, \ldots$ possono essere tuple.

K classe di L-strutture. Richiamiamo:

$M \in K$ è *esistenzialmente chiusa* (ec) in K sse, per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ esistenziale e $a \in M$, se c'è un'immersione $M \to N \in K$ con $N \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

- Campi ec = campi algebricamente chiusi.
- Oags ec = oags divisibili (non banali).
- J classe di Fraïssé, $K \coloneqq \{$strutture con età $J\} \implies \mathrm{Fr\text{-}lim}(J)$ è ec in K.
- K *induttiva* $\coloneqq$ chiusa per unione di catene $\implies$ ogni $A \in K$ si immerge in un $B \in K$ ec.

Sia $K = \mathrm{Mod}(T)$. Allora:

- K induttiva $\iff$ T è $\forall\exists$-assiomatizzabile.
- T model-completa $\iff$ ogni $M \in K$ è ec in K.
- $K^{\mathrm{ec}} \coloneqq \{M \in K \mid M \text{ ec}\}$ elementare $\iff$ T ha una model companion $= \mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$.

T_1, T compagne $\coloneqq$ ogni $M \vDash T$ si immerge in un $M_1 \vDash T_1$ e viceversa; model companion $\coloneqq$ compagna model-completa.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' \coloneqq L \cup \{\sigma\}$.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' := L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' := \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' := L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' := \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \models T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K := \mathrm{Mod}(T')$.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' := L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' := \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K := \mathrm{Mod}(T')$.
- K^{ec} può essere elementare o meno.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' \coloneqq L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' \coloneqq \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K \coloneqq \mathrm{Mod}(T')$.
- K^{ec} può essere elementare o meno.
- Se lo è, diciamo che $T_A \coloneqq \mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ *esiste*.

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' \coloneqq L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' \coloneqq \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K \coloneqq \mathrm{Mod}(T')$.
- K^{ec} può essere elementare o meno.
- Se lo è, diciamo che $T_A \coloneqq \mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ *esiste*.
- Se T è la teoria dei campi (ACF_p), allora T_A esiste (ACFA).

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' := L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' := \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K := \mathrm{Mod}(T')$.
- K^{ec} può essere elementare o meno.
- Se lo è, diciamo che $T_A := \mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ *esiste*.
- Se T è la teoria dei campi (ACF_p), allora T_A esiste (ACFA).
- Su T_A si sanno un po' di cose. Per esempio: se T è (super)stabile e T_A esiste, allora T_A è (super)semplice (Chatzidakis–Pillay).

Automorfismi generici

- Fissiamo T completa.
- Morleyizzando, assumiamo che T sia $\forall\exists$-assiomatizzata con q.e. in L.
- Sia $L' \coloneqq L \cup \{\sigma\}$.
- Sia $T' \coloneqq \mathrm{Th}(\{(M, \sigma) \mid M \vDash T, \sigma \in \mathrm{Aut}(M)\})$.
- Sia $K \coloneqq \mathrm{Mod}(T')$.
- K^{ec} può essere elementare o meno.
- Se lo è, diciamo che $T_A \coloneqq \mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ *esiste*.
- Se T è la teoria dei campi (ACF_p), allora T_A esiste (ACFA).
- Su T_A si sanno un po' di cose. Per esempio: se T è (super)stabile e T_A esiste, allora T_A è (super)semplice (Chatzidakis–Pillay).
- O: se T_A esiste allora T elimina $\exists^\infty$ (Kudaibergenov).

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow$

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$.

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$.

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$. Chiaramente, $\sigma(A) = A$ (setwise).

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$. Chiaramente, $\sigma(A) = A$ (setwise). Se A ha massimo, o $M \setminus A$ ha minimo, deve essere un punto fisso (in $[a, b]$).

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \models \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$. Chiaramente, $\sigma(A) = A$ (setwise). Se A ha massimo, o $M \setminus A$ ha minimo, deve essere un punto fisso (in $[a, b]$). Altrimenti, possiamo aggiungere a M un punto fisso appena dopo A, quindi in $[a, b]$. Ma M è ec. $\square$

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$. Chiaramente, $\sigma(A) = A$ (setwise). Se A ha massimo, o $M \setminus A$ ha minimo, deve essere un punto fisso (in $[a, b]$). Altrimenti, possiamo aggiungere a M un punto fisso appena dopo A, quindi in $[a, b]$. Ma M è ec. $\square$

Quindi DLO_A non esiste: se M è ω-saturo, da un lato

$$M \vDash \forall y \left[\Big(\exists z \left((a < z < y) \land (\sigma(z) = z) \right) \Big) \leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(a) < y \right]$$

SOP

Teorema (Kikyo–Shelah)

Se T ha SOP, allora T_A non esiste.

Esempio: sia (M, σ) ec, con $M \vDash \mathsf{DLO}$. Allora $\exists x = \sigma(x) \in [a, b] \Leftrightarrow \operatorname{orb}(a) \leq b$.

Dimostrazione.

Se $a \leq x = \sigma(x) \leq b$ allora $\sigma^k(a) \leq \sigma^k(x) = x \leq b$. Viceversa, sia A l'intersezione delle $(-\infty, c) \supseteq \operatorname{orb}(a)$. Chiaramente, $\sigma(A) = A$ (setwise). Se A ha massimo, o $M \setminus A$ ha minimo, deve essere un punto fisso (in $[a, b]$). Altrimenti, possiamo aggiungere a M un punto fisso appena dopo A, quindi in $[a, b]$. Ma M è ec. $\square$

Quindi DLO_A non esiste: se M è ω-saturo, da un lato

$$M \vDash \forall y \left[\Big(\exists z \, ((a < z < y) \wedge (\sigma(z) = z)) \Big) \leftrightarrow \bigwedge_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(a) < y \right]$$

ma se $\sigma(a) \neq a$, per comp'zza+saturazione c'è $b \in M$ che soddisfa RHS ma non LHS.

Porre limitazioni agli automorfismi

Per studiare automorfismi "generici" di strutture ordinate, dobbiamo cambiare qualcosa.

Porre limitazioni agli automorfismi

Per studiare automorfismi "generici" di strutture ordinate, dobbiamo cambiare qualcosa. Un approccio: imporre limitazioni sui possibili automorfismi.

Teorema (Pal)

Sia $L = L_{\text{oag}} \cup \{\sigma\}$ e sia MODAG la teoria degli oag con automorfismo che soddisfano, per ogni $L \in \mathbb{Z}[\sigma]$, l'assioma

$$(\forall x > 0\ L(x) > 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) = 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) < 0)$$

Allora MODAG ha una model companion, che ha q.e.

Porre limitazioni agli automorfismi

Per studiare automorfismi “generici” di strutture ordinate, dobbiamo cambiare qualcosa. Un approccio: imporre limitazioni sui possibili automorfismi.

Teorema (Pal)

Sia $L = L_{\mathrm{oag}} \cup \{\sigma\}$ e sia MODAG la teoria degli oag con automorfismo che soddisfano, per ogni $L \in \mathbb{Z}[\sigma]$, l'assioma

$$(\forall x > 0\ L(x) > 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) = 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) < 0)$$

Allora MODAG ha una model companion, che ha q.e.

In particolare, in un modello di MODAG, o σ è l'identità, o non ha punti fissi (guardiamo $L(x) := \sigma(x) - x$).

Porre limitazioni agli automorfismi

Per studiare automorfismi "generici" di strutture ordinate, dobbiamo cambiare qualcosa. Un approccio: imporre limitazioni sui possibili automorfismi.

Teorema (Pal)

Sia $L = L_{\mathrm{oag}} \cup \{\sigma\}$ e sia MODAG la teoria degli oag con automorfismo che soddisfano, per ogni $L \in \mathbb{Z}[\sigma]$, l'assioma

$$(\forall x > 0\ L(x) > 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) = 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) < 0)$$

Allora MODAG ha una model companion, che ha q.e.

In particolare, in un modello di MODAG, o σ è l'identità, o non ha punti fissi (guardiamo $L(x) := \sigma(x) - x$).
Questo approccio è stato utile in contesto campi valutati con automorfismo (e.g. isometrico, contrattivo); cf. Azgın–van den Dries, Chernikov–Hils, Scanlon,...

Porre limitazioni agli automorfismi

Per studiare automorfismi "generici" di strutture ordinate, dobbiamo cambiare qualcosa. Un approccio: imporre limitazioni sui possibili automorfismi.

Teorema (Pal)

Sia $L = L_{\mathrm{oag}} \cup \{\sigma\}$ e sia MODAG la teoria degli oag con automorfismo che soddisfano, per ogni $L \in \mathbb{Z}[\sigma]$, l'assioma

$$(\forall x > 0\ L(x) > 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) = 0) \vee (\forall x > 0\ L(x) < 0)$$

Allora MODAG ha una model companion, che ha q.e.

In particolare, in un modello di MODAG, o σ è l'identità, o non ha punti fissi (guardiamo $L(x) \coloneqq \sigma(x) - x$).

Questo approccio è stato utile in contesto campi valutati con automorfismo (e.g. isometrico, contrattivo); cf. Azgın–van den Dries, Chernikov–Hils, Scanlon,...
Ma qui prendiamo un'altra strada.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists$

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \qquad \varphi, \psi$ positive.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \Longrightarrow N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \qquad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa*

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f \colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \qquad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa* (*pec*)

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \qquad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa* (*pec*) sse per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ *positiva* e $a \in M$, se c'è un omomorfismo $f\colon M \to N$ tale che $N \vDash \exists y\, \varphi(f(a), y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x))$ $\quad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa* (*pec*) sse per ogni $\exists y\ \varphi(x, y)$ *positiva* e $a \in M$, se c'è un omomorfismo $f\colon M \to N$ tale che $N \vDash \exists y\ \varphi(f(a), y)$, allora $M \vDash \exists y\ \varphi(a, y)$.
- Equivalentemente, ogni omomorfismo $f\colon M \to N$ è un'*immersione*: per φ positiva, $M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(f(a))$.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f \colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x))$ $\qquad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa* (*pec*) sse per ogni $\exists y\, \varphi(x, y)$ *positiva* e $a \in M$, se c'è un omomorfismo $f \colon M \to N$ tale che $N \vDash \exists y\, \varphi(f(a), y)$, allora $M \vDash \exists y\, \varphi(a, y)$.
- Equivalentemente, ogni omomorfismo $f \colon M \to N$ è un'*immersione*: per φ positiva, $M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(f(a))$.
- Una T h-induttiva è "completa" (i.e. della forma $\mathrm{Th}(M)$) sse ha la *joint continuation property* (JCP): come JEP, ma con omomorfismi.

C'erano una volta gli omomorfismi

- Logica positiva: per definire insiemi, possiamo usare solo formule positive: la chiusura delle atomiche per $\wedge, \vee, \exists, \top, \bot$.
- Cosa hanno di speciale? $\varphi(x)$ è positiva se e solo se per ogni omomorfismo $f\colon M \to N$, si ha $M \vDash \varphi(a) \implies N \vDash \varphi(f(a))$. (gli omomorfismi non sono sempre iniettivi!)
- Gli assiomi possono esprimere inclusioni fra insiemi definibili. Sono enunciati *h-induttivi* $\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \qquad \varphi, \psi$ positive.
- M è *positivamente esistenzialmente chiusa* (*pec*) sse per ogni $\exists y\ \varphi(x, y)$ *positiva* e $a \in M$, se c'è un omomorfismo $f\colon M \to N$ tale che $N \vDash \exists y\ \varphi(f(a), y)$, allora $M \vDash \exists y\ \varphi(a, y)$.
- Equivalentemente, ogni omomorfismo $f\colon M \to N$ è un'*immersione*: per φ positiva, $M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(f(a))$.
- Una T h-induttiva è "completa" (i.e. della forma $\mathrm{Th}(M)$) sse ha la *joint continuation property* (JCP): come JEP, ma con omomorfismi. Equivalentemente, se $T \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$ allora $T \vdash \neg\varphi$ o $T \vdash \neg\psi$ (φ, ψ positive).

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\, (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\, ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\, (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\, ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\ (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\ ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\} =$

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\,(\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\,((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\} =$ singoletti.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\ (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\ ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\}$ = singoletti.
- Se usiamo $L = \{<\}$, recuperiamo DLO. Serve cautela col linguaggio.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\, (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\, ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\}$ = singoletti.
- Se usiamo $L = \{<\}$, recuperiamo DLO. Serve cautela col linguaggio.
- Se $L = \{\neq\} \cup \{P_i \mid i < \omega\}$, e T dice che i P_i sono infiniti e a due a due disgiunti, allora abbiamo modelli pec arbitrariamente grandi, ma ogni punto di un modello pec è in qualche P_i.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\, (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\, ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\}$ = singoletti.
- Se usiamo $L = \{<\}$, recuperiamo DLO. Serve cautela col linguaggio.
- Se $L = \{\neq\} \cup \{P_i \mid i < \omega\}$, e T dice che i P_i sono infiniti e a due a due disgiunti, allora abbiamo modelli pec arbitrariamente grandi, ma ogni punto di un modello pec è in qualche P_i.
- La teoria h-induttiva di $M = (\omega, \leq, 0, 1, 2, \ldots)$ ha 2 modelli pec:

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\,(\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\,((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\}$ = singoletti.
- Se usiamo $L = \{<\}$, recuperiamo DLO. Serve cautela col linguaggio.
- Se $L = \{\neq\} \cup \{P_i \mid i < \omega\}$, e T dice che i P_i sono infiniti e a due a due disgiunti, allora abbiamo modelli pec arbitrariamente grandi, ma ogni punto di un modello pec è in qualche P_i.
- La teoria h-induttiva di $M = (\omega, \leq, 0, 1, 2, \ldots)$ ha 2 modelli pec: M e $\omega + 1$.

Esempi

- Se $L = \emptyset$ e $T = \emptyset$, i modelli pec sono singoletti.
- Se per ogni φ atomica aggiungiamo un simbolo $R_{\neg\varphi}$ e assiomi $\forall x\ (\top \to (R_{\neg\varphi}(x) \vee \varphi(x)))$ e $\forall x\ ((R_{\neg\varphi}(x) \wedge \varphi(x)) \to \bot)$, allora recuperiamo i modelli ec di teorie $\forall\exists$ classiche.
- Una teoria classica *arbitraria* si può vedere come h-induttiva con un trucco simile: invece di fermarsi alle φ atomiche, aggiungiamo $R_{\neg\varphi}$ per ogni formula, induttivamente (Morleyizzazione). Gli omomorfismi sono le immersioni elementari.
- Ordini lineari pec in $L = \{\leq\}$ = singoletti.
- Se usiamo $L = \{<\}$, recuperiamo DLO. Serve cautela col linguaggio.
- Se $L = \{\neq\} \cup \{P_i \mid i < \omega\}$, e T dice che i P_i sono infiniti e a due a due disgiunti, allora abbiamo modelli pec arbitrariamente grandi, ma ogni punto di un modello pec è in qualche P_i.
- La teoria h-induttiva di $M = (\omega, \leq, 0, 1, 2, \ldots)$ ha 2 modelli pec: M e $\omega + 1$.
- In generale, ora ci sono teorie con solo modelli pec *limitati* che non sono finiti.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \lor \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

In concreto:

1a. Per i tipi primi, prendiamo come aperti di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \lor \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

In concreto:

1a. Per i tipi primi, prendiamo come aperti di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

1b. O, prendiamo come chiusi di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

In concreto:

1a. Per i tipi primi, prendiamo come aperti di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

1b. O, prendiamo come chiusi di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva. È il *duale di Hochster* del primo spazio. Sono entrambi spettrali (in particolare, compatti T0).

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

In concreto:

1a. Per i tipi primi, prendiamo come aperti di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

1b. O, prendiamo come chiusi di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva. È il *duale di Hochster* del primo spazio. Sono entrambi spettrali (in particolare, compatti T0).

2b. Per i tipi massimali, prendiamo i punti chiusi del secondo spazio con la topologia indotta. Questo è compatto T1 (non per forza spettrale).

Spazi di tipi

Cosa sono i tipi (su $\emptyset$) in questo contesto? Ci sono un po' di approcci.

1. Guardiamo i tipi di elementi di modelli arbitrari. Equivale a: insiemi coerenti *primi* di formule positive: se $p(x) \vdash \varphi(x) \vee \psi(x)$, allora $p(x) \vdash \varphi(x)$ o $p(x) \vdash \psi(x)$.
2. Guardiamo solo i tipi di modelli pec. Equivale a: *massimali*.

Gli insiemi definibili sono un reticolo distributivo (non sempre un'algebra di Boole).

$$\text{Algebre di Boole} : \text{Spazi di Stone} = \text{Reticoli distributivi} : \text{Spazi spettrali}$$

In concreto:

1a. Per i tipi primi, prendiamo come aperti di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva.

1b. O, prendiamo come chiusi di base i $[\varphi(x)]$, con $\varphi(x)$ positiva. È il *duale di Hochster* del primo spazio. Sono entrambi spettrali (in particolare, compatti T0).

2b. Per i tipi massimali, prendiamo i punti chiusi del secondo spazio con la topologia indotta. Questo è compatto T1 (non per forza spettrale).

2a. La prima topologia ristretta ai punti massimali può non essere compatta. In quella topologia, sono i punti generici delle componenti irriducibili.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare?

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.
Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.
In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.
Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d'Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.
Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.
In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.
Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d'Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.
- Dobrowolski–Kamsma: sviluppo di NSOP_1.

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.

Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.

In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.

Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto “Robinson”). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d’Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.
- Dobrowolski–Kamsma: sviluppo di NSOP_1.

Qual è il vantaggio di fare così, invece di guardare la teoria classica di K^{ec}?

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.
Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.
In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.
Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d'Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.
- Dobrowolski–Kamsma: sviluppo di NSOP_1.

Qual è il vantaggio di fare così, invece di guardare la teoria classica di K^{ec}?
Dobbiamo guardare solo le formule positive,

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.
Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.
In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.
Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto “Robinson”). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d’Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.
- Dobrowolski–Kamsma: sviluppo di NSOP_1.

Qual è il vantaggio di fare così, invece di guardare la teoria classica di K^{ec}?
Dobbiamo guardare solo le formule positive, non dobbiamo guardare i modelli di $\mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ non in K^{ec},

Neostabilità positiva

Chi ce lo fa fare? Un motivo è gestire gli iperimmaginari.
Per noi: perché si possono sviluppare stabilità e generalizzazioni in questo contesto.
In altre parole: vogliamo fare teoria della neostabilità su strutture pec.
Alcuni esempi (senza alcun claim di esaustività):

- Shelah: stabilità.
- Pillay: semplicità (in contesto "Robinson"). Automorfismi generici di strutture stabili (sono semplici).
- Ben Yaacov: semplicità in contesto generale (e non solo).
- Haykazyan–Kirby: i campi esponenzialil ec sono TP_2 e NSOP_1.
- d'Elbée–Kaplan–Neuhauser: i campi con R-sottomodulo ec sono TP_2 e NSOP_1.
- Dobrowolski–Kamsma: sviluppo di NSOP_1.

Qual è il vantaggio di fare così, invece di guardare la teoria classica di K^{ec}? Dobbiamo guardare solo le formule positive, non dobbiamo guardare i modelli di $\mathrm{Th}(K^{\mathrm{ec}})$ non in K^{ec}, possiamo aggiungere iperimmaginari,...

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x, y)$ positiva ha IP sse ci sono un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_W)_{W\in\mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x, y)$ positiva ha IP sse ci sono $\psi(x, y)$ positiva, un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_W)_{W\in\mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$
2. $i \notin W \Rightarrow M \vDash \psi(a_i; b_W)$
3. $T \vdash \forall x, y\ (\varphi(x; y) \land \psi(x; y)) \to \bot$.

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x, y)$ positiva ha IP sse ci sono $\psi(x, y)$ positiva, un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_W)_{W\in\mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$
2. $i \notin W \Rightarrow M \vDash \psi(a_i; b_W)$
3. $T \vdash \forall x, y\ (\varphi(x; y) \wedge \psi(x; y)) \to \bot$.

- Non abbiamo mai visto questa definizione in stampa, ma probabilmente non siamo i primi a pensarci. Ben Yaacov usa una definizione simile in contesto logica continua. Trucchi simili funzionano per NTP_2 e NSOP_1.

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x, y)$ positiva ha IP sse ci sono $\psi(x, y)$ positiva, un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i \in \omega}$, $(b_W)_{W \in \mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$
2. $i \notin W \Rightarrow M \vDash \psi(a_i; b_W)$
3. $T \vdash \forall x, y\ (\varphi(x; y) \wedge \psi(x; y)) \to \bot$.

- Non abbiamo mai visto questa definizione in stampa, ma probabilmente non siamo i primi a pensarci. Ben Yaacov usa una definizione simile in contesto logica continua. Trucchi simili funzionano per NTP_2 e NSOP_1.
- Lo spirito è: i testimoni devono essere preservati dagli omomorfismi.

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x,y)$ positiva ha IP sse ci sono $\psi(x,y)$ positiva, un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_W)_{W\in\mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$
2. $i \notin W \Rightarrow M \vDash \psi(a_i; b_W)$
3. $T \vdash \forall x, y\ (\varphi(x;y) \wedge \psi(x;y)) \to \perp$.

- Non abbiamo mai visto questa definizione in stampa, ma probabilmente non siamo i primi a pensarci. Ben Yaacov usa una definizione simile in contesto logica continua. Trucchi simili funzionano per NTP_2 e NSOP_1.
- Lo spirito è: i testimoni devono essere preservati dagli omomorfismi.
- Inoltre: in un $M \vDash T$ pec, "le cose negative hanno una causa positiva": se $M \vDash \neg\varphi(a)$, allora c'è ψ con $M \vDash \psi(a)$ e $T \vdash \forall x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \perp$.

NIP in logica positiva

T teoria h-induttiva con JCP. Una $\varphi(x,y)$ positiva ha IP sse ci sono $\psi(x,y)$ positiva, un $M \vDash T$, e tuple $(a_i)_{i\in\omega}$, $(b_W)_{W\in\mathscr{P}(\omega)}$ in M tali che

1. $i \in W \Rightarrow M \vDash \varphi(a_i; b_W)$
2. $i \notin W \Rightarrow M \vDash \psi(a_i; b_W)$
3. $T \vdash \forall x, y\ (\varphi(x;y) \wedge \psi(x;y)) \to \bot$.

- Non abbiamo mai visto questa definizione in stampa, ma probabilmente non siamo i primi a pensarci. Ben Yaacov usa una definizione simile in contesto logica continua. Trucchi simili funzionano per NTP_2 e NSOP_1.
- Lo spirito è: i testimoni devono essere preservati dagli omomorfismi.
- Inoltre: in un $M \vDash T$ pec, "le cose negative hanno una causa positiva": se $M \vDash \neg\varphi(a)$, allora c'è ψ con $M \vDash \psi(a)$ e $T \vdash \forall x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \bot$.

Alcune cose si generalizzano facilmente, altre sono più delicate. Più info

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$. Non si può avere
$g \cdot a_i < a_0 < a_1 < g \cdot a_j$.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$. Non si può avere
$g \cdot a_i < a_0 < a_1 < g \cdot a_j$. Nè $a_0 < g \cdot a_i < a_1$:

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$. Non si può avere
$g \cdot a_i < a_0 < a_1 < g \cdot a_j$. Nè $a_0 < g \cdot a_i < a_1$: sennò $g \cdot a_3 \in (a_0, a_1) \cap (a_1, a_2) = \emptyset$.

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$. Non si può avere
$g \cdot a_i < a_0 < a_1 < g \cdot a_j$. Nè $a_0 < g \cdot a_i < a_1$: sennò $g \cdot a_3 \in (a_0, a_1) \cap (a_1, a_2) = \emptyset$.
Segue che per ogni b finita c'è i_0 tale che, per ogni $g \in G$,

$$b \cap g \cdot \mathrm{Conv}((a_i)_{i_0<i<\omega}) = \emptyset$$

Automorfismi generici di ordini lineari

- Siano $L = \{<, \sigma, \sigma^{-1}\}$ e T la L-teoria dei DLO con automorfismo.
- (perché non "ordini lineari", fine? perché un M pec sarà comunque un DLO)
- Come visto prima, $\mathrm{Mod}(T)^{\mathrm{ec}}$ non è elementare.

Teorema (Dobrowoslki, M.)

Sia G un gruppo. La teoria positiva dei DLO con G-azione per automorfismi è NIP.

Idea: usiamo che NIP è equivalente ad avere numero di alternanze finito.
Sia $(a_i)_{i<\omega}$ indiscernibile crescente, e $i, j \geq 2$. Non si può avere $g \cdot a_i < a_0 < a_1 < g \cdot a_j$. Nè $a_0 < g \cdot a_i < a_1$: sennò $g \cdot a_3 \in (a_0, a_1) \cap (a_1, a_2) = \emptyset$.
Segue che per ogni b finita c'è i_0 tale che, per ogni $g \in G$,

$$b \cap g \cdot \mathrm{Conv}((a_i)_{i_0<i<\omega}) = \emptyset$$

Quindi la successione "potata" è b-indiscernible.

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \vDash T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \models T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \models T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso; quindi nessun intervallo è coperto da finiti $f(x) = d$.

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \vDash T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso; quindi nessun intervallo è coperto da finiti $f(x) = d$.
- $\mathrm{cl}(A) = \{$soluzioni di equazioni con parametri in $A\}$ è una pregeometria con buone proprietà, ma perfino $\mathrm{cl}(\emptyset)$ cresce con M (punti fissi!).

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \vDash T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso; quindi nessun intervallo è coperto da finiti $f(x) = d$.
- $\mathrm{cl}(A) = \{$soluzioni di equazioni con parametri in $A\}$ è una pregeometria con buone proprietà, ma perfino $\mathrm{cl}(\emptyset)$ cresce con M (punti fissi!).
- Le soluzioni di $f(x) = d$ formano un traslato di un $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$-sottomodulo. In particolare, hanno cardinalità 0, 1, o infinita.

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \vDash T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso; quindi nessun intervallo è coperto da finiti $f(x) = d$.
- $\mathrm{cl}(A) = \{$soluzioni di equazioni con parametri in $A\}$ è una pregeometria con buone proprietà, ma perfino $\mathrm{cl}(\emptyset)$ cresce con M (punti fissi!).
- Le soluzioni di $f(x) = d$ formano un traslato di un $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$-sottomodulo. In particolare, hanno cardinalità 0, 1, o infinita.
- Il gruppo fisso ha più struttura di un DOAG: $\exists z \in (x_0, x_1)\ \sigma^2(z) = \sigma(z) + z$ induce $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} x_1 > n \cdot x_0$.

Automorfismi generici di oag divisibili

Sia T la teoria dei DOAG con automorfismo, in $L = \{+, 0, -, <, \sigma, \sigma^{-1}\}$.

- (gli oag con automorfismo pec sono divisibli: σ si estende (unicamente) all'inviluppo divisible)
- In un modello pec, il gruppo fisso $\{x \mid \sigma(x) = x\}$ è codenso: se $M \models T$ ha un intervallo (a, b) di punti fissi, aggiungiamo infinitesimi $\varepsilon_{i-1} \ll \varepsilon_i \ll \varepsilon_{i+1}$ con l'azione di shift e consideriamo $(a + b)/2 + \varepsilon_i$.
- Meglio: in M pec ω-saturo, per $A \subseteq M$ finito, l'insieme dei punti A-trascendenti è codenso; quindi nessun intervallo è coperto da finiti $f(x) = d$.
- $\mathrm{cl}(A) = \{$soluzioni di equazioni con parametri in $A\}$ è una pregeometria con buone proprietà, ma perfino $\mathrm{cl}(\emptyset)$ cresce con M (punti fissi!).
- Le soluzioni di $f(x) = d$ formano un traslato di un $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$-sottomodulo. In particolare, hanno cardinalità 0, 1, o infinita.
- Il gruppo fisso ha più struttura di un DOAG: $\exists z \in (x_0, x_1)\ \sigma^2(z) = \sigma(z) + z$ induce $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} x_1 > n \cdot x_0$.
- Per genericità, non possiamo vedere $\mathbb{Q}[\sigma, \sigma^{-1}]$ come anello ordinato!

Domande e problemi

1. NIP?

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori).

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi.

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP?

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP? (Sospettiamo valga)

AP per *tutti* i modelli corrisponde a una "eliminazione dei quantificatori infinitaria" per modelli pec

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP? (Sospettiamo valga)

AP per *tutti* i modelli corrisponde a una "eliminazione dei quantificatori infinitaria" per modelli pec, e al fatto che le componenti irriducibili dello spazio dei tipi siano disgiunte.

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP? (Sospettiamo valga)

AP per *tutti* i modelli corrisponde a una "eliminazione dei quantificatori infinitaria" per modelli pec, e al fatto che le componenti irriducibili dello spazio dei tipi siano disgiunte.
È stato osservato (da molti) che è vera per i $\sigma-\mathsf{LO}$.

Domande e problemi

1. NIP? NTP$_2$? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP? (Sospettiamo valga)

AP per *tutti* i modelli corrisponde a una "eliminazione dei quantificatori infinitaria" per modelli pec, e al fatto che le componenti irriducibili dello spazio dei tipi siano disgiunte.
È stato osservato (da molti) che è vera per i $\sigma-$LO.
Difficoltà: le amalgamazioni di oag hanno struttura (Pierce), ma i σ-polinomi forzano identificazioni.

Domande e problemi

1. NIP? NTP_2? (con un occhio verso i campi valutati con automorfismo pec)

   Le formule senza quantificatori sono NIP (di preciso: se φ, ψ testimoniano IP, entrambe hanno quantificatori). In generale, serve una comprensione migliore degli insiemi definibili. Per esempio, i σ-polinomi non constanti hanno immagine illimitata (aggiugiamo successioni di Morley a $+\infty$ con shift), ma non sappiamo se sono surgettivi. Due domande che potrebbero aiutare:

2. AP? (Sospettiamo valga)

   AP per *tutti* i modelli corrisponde a una "eliminazione dei quantificatori infinitaria" per modelli pec, e al fatto che le componenti irriducibili dello spazio dei tipi siano disgiunte.
   È stato osservato (da molti) che è vera per i $\sigma-\mathsf{LO}$.
   Difficoltà: le amalgamazioni di oag hanno struttura (Pierce), ma i σ-polinomi forzano identificazioni.

3. IVP?

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto.

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z} + \mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro.

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z}+\mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro. Sia a la funzione caratteristica di un punto qualunque nella prima copia di $\mathbb{Z}$

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z} + \mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro. Sia a la funzione caratteristica di un punto qualunque nella prima copia di $\mathbb{Z}$, e b quella di un punto qualunque nella seconda.

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z} + \mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro. Sia a la funzione caratteristica di un punto qualunque nella prima copia di $\mathbb{Z}$, e b quella di un punto qualunque nella seconda. Allora $\sigma(x) - x$ cambia segno su (a, b)

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z}+\mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro. Sia a la funzione caratteristica di un punto qualunque nella prima copia di $\mathbb{Z}$, e b quella di un punto qualunque nella seconda. Allora $\sigma(x) - x$ cambia segno su (a, b), ma l'unico punto fisso in $\mathbb{R}((\mathbb{Z}+\mathbb{Z}))$ è 0, perché σ cambia il supporto di ogni altro elemento.

IVP

Congettura (IVP)

Sia M un oag con automorfismo pec e f un σ-polinomio a parametri da M. Se $a < b$ e $f(a), f(b)$ hanno segno diverso, allora c'è $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.

("σ-polinomio" probabilmente è cattiva terminologia; suggerimenti?)

Aspettarsi che questo sia vero sembra ragionevole, ma dimostrarlo si è dimostrato (scusate) più sfuggente del previsto. L'ipotesi "pec" è necessaria:

Esempio

Consideriamo il gruppo di Hahn $\mathbb{R}((\mathbb{Z} + \mathbb{Z}))$. Prendiamo σ che shifta la prima copia di $\mathbb{Z}$ in avanti e la seconda indietro. Sia a la funzione caratteristica di un punto qualunque nella prima copia di $\mathbb{Z}$, e b quella di un punto qualunque nella seconda. Allora $\sigma(x) - x$ cambia segno su (a, b), ma l'unico punto fisso in $\mathbb{R}((\mathbb{Z} + \mathbb{Z}))$ è 0, perché σ cambia il supporto di ogni altro elemento.

Difficoltà: se proviamo ad aggiungere soluzioni "a mano", le disuguaglianze hanno una tendenza a valere nel verso opposto a quello che servirebbe.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p;

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

Teorema (Dobrowolski, M.; "IVP ortogonale")

Sia M un $\sigma-\mathsf{DOAG}$, e f un σ-polinomio di grado n con parametri da M che cambia segno in p.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)
Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:
Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

Teorema (Dobrowolski, M.; "IVP ortogonale")

Sia M un $\sigma-$DOAG, e f un σ-polinomio di grado n con parametri da M che cambia segno in p. Supponiamo che $p(x_0) \cup \sigma_* p(x_1) \cup \ldots \cup \sigma_*^{n-1} p(x_{n-1})$ sia un L_{oag}-tipo completo su M.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)
Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:
Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

Teorema (Dobrowolski, M.; "IVP ortogonale")

Sia M un $\sigma-\mathsf{DOAG}$, e f un σ-polinomio di grado n con parametri da M che cambia segno in p. Supponiamo che $p(x_0) \cup \sigma_* p(x_1) \cup \ldots \cup \sigma_*^{n-1} p(x_{n-1})$ sia un L_{oag}-tipo completo su M. Allora, in una continuazione di M, c'è uno zero di f in p.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

Teorema (Dobrowolski, M.; "IVP ortogonale")

Sia M un $\sigma-$DOAG, e f un σ-polinomio di grado n con parametri da M che cambia segno in p. Supponiamo che $p(x_0) \cup \sigma_* p(x_1) \cup \ldots \cup \sigma_*^{n-1} p(x_{n-1})$ sia un L_{oag}-tipo completo su M. Allora, in una continuazione di M, c'è uno zero di f in p.

Corollario: i σ-polinomi di grado 1 soddisfano la IVP.

IVP: risultato parziale

Un approccio più promettente porta a voler mostrare che certi poliedri hanno intersezione non vuota. (che altro vi aspettavate?)

Il caso generale (è intricato ed) è ancora lavoro in corso, ma:

Sia $p = (L_p, R_p)$ un taglio in M. Un σ-polinomio f *cambia segno* in p sse

- $\{a \in M \mid f(a) < 0\}$ è cofinale in L_p e $\{a \in M \mid f(a) > 0\}$ è coiniziale in R_p; o
- viceversa (lo stesso ma per $-f$).

Teorema (Dobrowolski, M.; "IVP ortogonale")

Sia M un $\sigma-$DOAG, e f un σ-polinomio di grado n con parametri da M che cambia segno in p. Supponiamo che $p(x_0) \cup \sigma_* p(x_1) \cup \ldots \cup \sigma_*^{n-1} p(x_{n-1})$ sia un L_{oag}-tipo completo su M. Allora, in una continuazione di M, c'è uno zero di f in p.

Corollario: i σ-polinomi di grado 1 soddisfano la IVP.

Grazie per l'attezione

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, ^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel…

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, ^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel...
- Cose come tipi invarianti, coeredi,... richiedono cautela.

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, {}^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel…
- Cose come tipi invarianti, coeredi,… richiedono cautela.
- Per esempio, cosa è un coerede? In che spazio prendiamo la chiusura?

Indietro

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, {}^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel…
- Cose come tipi invarianti, coeredi,… richiedono cautela.
- Per esempio, cosa è un coerede? In che spazio prendiamo la chiusura?
- Se lavoriamo in maniera naïf, i coeredi di tipi massimali possono non essere massimali (tipo a $+\infty$ in $(\omega, \leq, 0, 1, 2, \dots)$).

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, {}^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel…
- Cose come tipi invarianti, coeredi,… richiedono cautela.
- Per esempio, cosa è un coerede? In che spazio prendiamo la chiusura?
- Se lavoriamo in maniera naïf, i coeredi di tipi massimali possono non essere massimali (tipo a $+\infty$ in $(\omega, \leq, 0, 1, 2, \ldots)$).
- Si può anche costruire un tipo su un M pec senza estensioni globali M-invarianti!

Indietro

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, ^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel...
- Cose come tipi invarianti, coeredi,... richiedono cautela.
- Per esempio, cosa è un coerede? In che spazio prendiamo la chiusura?
- Se lavoriamo in maniera naïf, i coeredi di tipi massimali possono non essere massimali (tipo a $+\infty$ in $(\omega, \leq, 0, 1, 2, \ldots)$).
- Si può anche costruire un tipo su un M pec senza estensioni globali M-invarianti!
- In generale, alcuni strumenti sono delicati: e.g. ci sono teorie dove avere lo stesso tipo su un modello pec non implica avere lo stesso tipo forte di Lascar (definito con le successioni indiscernibili).

Indietro

Controparti positive

- Questi fatti sulle teorie NIP si generalizzano facilmente: definizione con numero di alternanze su una successione indiscernibile, essere NIP è preservato da $\vee, \wedge, ^{\mathrm{op}}$, si può controllare in una variabile, una versione della definibilità Borel…
- Cose come tipi invarianti, coeredi,… richiedono cautela.
- Per esempio, cosa è un coerede? In che spazio prendiamo la chiusura?
- Se lavoriamo in maniera naïf, i coeredi di tipi massimali possono non essere massimali (tipo a $+\infty$ in $(\omega, \leq, 0, 1, 2, \dots)$).
- Si può anche costruire un tipo su un M pec senza estensioni globali M-invarianti!
- In generale, alcuni strumenti sono delicati: e.g. ci sono teorie dove avere lo stesso tipo su un modello pec non implica avere lo stesso tipo forte di Lascar (definito con le successioni indiscernibili).
- Ipotesi a volte necessarie/utili: essere *semi-Hausdorff* (l'uguaglianza di tipi è tipo-definibile), essere *spessa* (l'indiscernibilità è tipo-definibile).

Indietro