L'ordine di Rudin-Keisler e ultrafiltri Tukey-massimali su algebre di Boole

Francesco Parente

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TORINO

2022-02-15

Referenze

[1] J. Brendle e F. P.
Combinatorics of ultrafilters on Cohen and random algebras
arXiv:2009.11530 [math.LO]

[2] J. Brendle e F. P.
Orderings of ultrafilters on Boolean algebras
arXiv:2107.01447 [math.LO]

[3] J. Brendle e F. P.
Preservation of ultrafilters and the uniformity of the meagre ideal
In preparazione

Ordine di Tukey

Ordine di Tukey

Definizione (Tukey [1940])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathsf{T}} V$ se e solo se esistono due funzioni $f: U \to V$ e $g: V \to U$ tali che per ogni $u \in U$ e $v \in V$

$$v \leq f(u) \implies g(v) \leq u.$$

Ordine di Tukey

Definizione (Tukey [1940])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathsf{T}} V$ se e solo se esistono due funzioni $f \colon U \to V$ e $g \colon V \to U$ tali che per ogni $u \in U$ e $v \in V$

$$v \leq f(u) \implies g(v) \leq u.$$

Denotiamo con $\mathrm{cof}(U)$ la minima cardinalità di un sottoinsieme cofinale di $\langle U, \geq \rangle$.

Ordine di Tukey

Definizione (Tukey [1940])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathrm{T}} V$ se e solo se esistono due funzioni $f \colon U \to V$ e $g \colon V \to U$ tali che per ogni $u \in U$ e $v \in V$

$$v \leq f(u) \implies g(v) \leq u.$$

Denotiamo con $\mathrm{cof}(U)$ la minima cardinalità di un sottoinsieme cofinale di $\langle U, \geq \rangle$.

Proposizione (Schmidt [1955])

Se $U \leq_{\mathrm{T}} V$ *allora* $\mathrm{cof}(U) \leq \mathrm{cof}(V)$.

Ultrafiltri Tukey-massimali

Definizione

Un ultrafiltro U su $\mathbb{B}$ è Tukey-massimale se per ogni ultrafiltro V su $\mathbb{B}$ si ha $V \leq_{\mathsf{T}} U$.

Ultrafiltri Tukey-massimali

Definizione

Un ultrafiltro U su $\mathbb{B}$ è Tukey-massimale se per ogni ultrafiltro V su $\mathbb{B}$ si ha $V \leq_{\mathsf{T}} U$.

Teorema (Isbell [1965])

Per ogni insieme A, esiste un ultrafiltro Tukey-massimale su A.

Ultrafiltri Tukey-massimali

Definizione

Un ultrafiltro U su $\mathbb{B}$ è Tukey-massimale se per ogni ultrafiltro V su $\mathbb{B}$ si ha $V \leq_{\mathsf{T}} U$.

Teorema (Isbell [1965])

Per ogni insieme A, esiste un ultrafiltro Tukey-massimale su A.

Problema (Isbell [1965])

Esistono ultrafiltri non principali su ω che *non* siano Tukey-massimali?

Ultrafiltri Tukey-massimali

Il problema posto da Isbell ha stimolato una linea di ricerca con risultati recenti di Milovich, Todorčević, Raghavan, e molti altri.

Ultrafiltri Tukey-massimali

Il problema posto da Isbell ha stimolato una linea di ricerca con risultati recenti di Milovich, Todorčević, Raghavan, e molti altri.

Teorema (Brown e Dobrinen [2016])

Se $\mathbb{F}$ è l'algebra di Boole libera su un insieme infinito di generatori, allora ogni ultrafiltro su $\mathbb{F}$ è Tukey-massimale.

Ultrafiltri Tukey-massimali

Il problema posto da Isbell ha stimolato una linea di ricerca con risultati recenti di Milovich, Todorčević, Raghavan, e molti altri.

Teorema (Brown e Dobrinen [2016])

Se $\mathbb{F}$ è l'algebra di Boole libera su un insieme infinito di generatori, allora ogni ultrafiltro su $\mathbb{F}$ è Tukey-massimale.

- Se $\mathbb{B}$ è un'algebra di Boole infinita tale che ogni ultrafiltro su $\mathbb{B}$ è Tukey-massimale, allora $\mathbb{B}$ è libera?
- Quali algebre ammettono ultrafiltri non Tukey-massimali?

Algebre Cohen e random

Dato un cardinale κ, sia $\mathcal{B}({}^{\kappa}2)$ la σ-algebra generata dai sottoinsiemi clopen dello spazio prodotto ${}^{\kappa}2$. Definiamo

$$\mathbb{C}_{\kappa} = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{M}(\kappa) \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{\kappa} = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{N}(\kappa)$$

i quozienti modulo l'ideale degli insiemi magri e l'ideale degli insiemi nulli in ${}^{\kappa}2$, rispettivamente.

Algebre Cohen e random

Dato un cardinale κ, sia $\mathcal{B}({}^{\kappa}2)$ la σ-algebra generata dai sottoinsiemi clopen dello spazio prodotto ${}^{\kappa}2$. Definiamo

$$\mathbb{C}_{\kappa} = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{M}(\kappa) \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_{\kappa} = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{N}(\kappa)$$

i quozienti modulo l'ideale degli insiemi magri e l'ideale degli insiemi nulli in ${}^{\kappa}2$, rispettivamente.

Teorema (Brendle e P.)

Se κ soddisfa $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, allora tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{C}_{\kappa}$ e tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{B}_{\kappa}$ sono Tukey-massimali.

Algebre Cohen e random

Dato un cardinale κ, sia $\mathcal{B}({}^{\kappa}2)$ la σ-algebra generata dai sottoinsiemi clopen dello spazio prodotto ${}^{\kappa}2$. Definiamo

$$\mathbb{C}_\kappa = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{M}(\kappa) \quad \text{e} \quad \mathbb{B}_\kappa = \mathcal{B}({}^{\kappa}2)/\mathcal{N}(\kappa)$$

i quozienti modulo l'ideale degli insiemi magri e l'ideale degli insiemi nulli in ${}^{\kappa}2$, rispettivamente.

Teorema (Brendle e P.)

Se κ soddisfa $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, allora tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{C}_\kappa$ e tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{B}_\kappa$ sono Tukey-massimali.

Idea della dimostrazione.

Usare il fatto che gli ideali $\mathcal{M}(\kappa)$ e $\mathcal{N}(\kappa)$ sono "index invariant", una proprietà isolata da Kunen [1984]. $\square$

Ultrafilter number

Definizione

Sia $\mathbb{B}$ un'algebra di Boole infinita. Definiamo

$$\mathfrak{u}(\mathbb{B}) = \min\{\mathrm{cof}(U) \mid U \text{ è un ultrafiltro non principale su } \mathbb{B}\}.$$

Per semplicità di notazione, sia $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\mathcal{P}(\omega))$.

Ultrafilter number

Definizione

Sia $\mathbb{B}$ un'algebra di Boole infinita. Definiamo

$$\mathfrak{u}(\mathbb{B}) = \min\{\mathrm{cof}(U) \mid U \text{ è un ultrafiltro non principale su } \mathbb{B}\}.$$

Per semplicità di notazione, sia $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\mathcal{P}(\omega))$.

La motivazione per considerare questo cardinale nel contesto dell'ordine di Tukey è data dalla seguente osservazione.

Osservazione

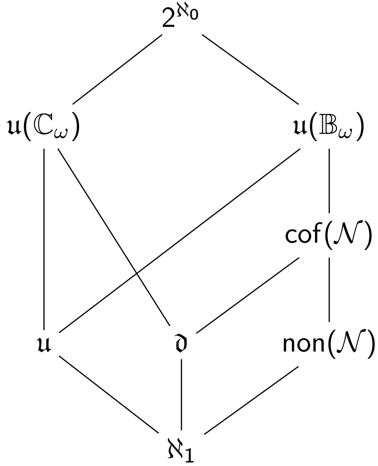
Sia $\mathbb{B}$ un'algebra di Boole infinita. Se $\mathfrak{u}(\mathbb{B}) < |\mathbb{B}|$, allora esiste un ultrafiltro non principale su $\mathbb{B}$ che non è Tukey-massimale.

L'ultrafilter number di $\mathbb{C}_\omega$ e $\mathbb{B}_\omega$

L'ultrafilter number di $\mathbb{C}_\omega$ e $\mathbb{B}_\omega$

Teorema

Valgono le disuguaglianze del seguente diagramma.



Risultati di indipendenza

Teorema (Brendle e P.)

È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Risultati di indipendenza

Teorema (Brendle e P.)
È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Teorema (Brendle e P.)
È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{B}_\omega) < 2^{\aleph_0}$.

Risultati di indipendenza

Teorema (Brendle e P.)

È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Teorema (Brendle e P.)

È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{B}_\omega) < 2^{\aleph_0}$.

Domande

- È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$?

Risultati di indipendenza

Teorema (Brendle e P.)

È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Teorema (Brendle e P.)

È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{B}_\omega) < 2^{\aleph_0}$.

Domande

- È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega) < \mathrm{non}(\mathcal{M})$?
- È coerente che $\mathfrak{u}(\mathbb{B}_\omega) < \mathfrak{u}(\mathbb{C}_\omega)$?

Ultrafiltri non massimali sull'algebra di Cohen

Ultrafiltri non massimali sull'algebra di Cohen

Teorema (Brendle e P.)

Supponiamo $\mathfrak{d} = 2^{\aleph_0}$. *Sia* $\mathbb{B}$ *un'algebra di Boole c.c.c. completa di cardinalità* $2^{\aleph_0}$. *Se* $\mathbb{B}$ *ha una sottoalgebra densa di cardinalità* $< 2^{\aleph_0}$, *allora esiste un ultrafiltro non principale su* $\mathbb{B}$ *che non è Tukey-massimale.*

Ultrafiltri non massimali sull'algebra di Cohen

Teorema (Brendle e P.)

Supponiamo $\mathfrak{d} = 2^{\aleph_0}$. *Sia* $\mathbb{B}$ *un'algebra di Boole c.c.c. completa di cardinalità* $2^{\aleph_0}$. *Se* $\mathbb{B}$ *ha una sottoalgebra densa di cardinalità* $< 2^{\aleph_0}$, *allora esiste un ultrafiltro non principale su* $\mathbb{B}$ *che non è Tukey-massimale.*

Osservazione

In particolare, assumendo $\mathfrak{d} = 2^{\aleph_0}$, il teorema fornisce un ultrafiltro non massimale su $\mathbb{C}_\omega$. Tuttavia, il risultato non si applica a $\mathbb{B}_\omega$, poiché l'ipotesi $\mathfrak{d} = 2^{\aleph_0}$ implica che ogni sottoalgebra densa di $\mathbb{B}_\omega$ debba avere cardinalità $2^{\aleph_0}$.

Ultrafiltri non massimali sull'algebra random

Definizione (Jensen [1972])

Sia $\diamondsuit$ il seguente principio: esiste una successione $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ tale che $S_\alpha \subseteq \alpha$ e, per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario.

Ultrafiltri non massimali sull'algebra random

Definizione (Jensen [1972])

Sia $\diamondsuit$ il seguente principio: esiste una successione $\langle S_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ tale che $S_\alpha \subseteq \alpha$ e, per ogni $X \subseteq \omega_1$, l'insieme $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$ è stazionario.

Teorema (Brendle e P.)

$\diamondsuit$ *implica l'esistenza di un ultrafiltro non Tukey-massimale su* $\mathbb{B}_\omega$.

Ordine di Rudin-Keisler

Definizione

Siano U e V ultrafiltri su un insieme A. Definiamo $U \leq_{\mathrm{RK}} V$ se e solo se esiste una funzione $f : A \to A$ tale che per ogni $X \subseteq A$

$$X \in U \iff f^{-1}[X] \in V.$$

Ordine di Rudin-Keisler

Definizione

Siano U e V ultrafiltri su un insieme A. Definiamo $U \leq_{\mathsf{RK}} V$ se e solo se esiste una funzione $f : A \to A$ tale che per ogni $X \subseteq A$

$$X \in U \iff f^{-1}[X] \in V.$$

Osserviamo che $U \leq_{\mathsf{RK}} V$ implica $U \leq_{\mathsf{T}} V$.

Ordine di Rudin-Keisler

Definizione

Siano U e V ultrafiltri su un insieme A. Definiamo $U \leq_{\mathrm{RK}} V$ se e solo se esiste una funzione $f\colon A \to A$ tale che per ogni $X \subseteq A$

$$X \in U \iff f^{-1}[X] \in V.$$

Osserviamo che $U \leq_{\mathrm{RK}} V$ implica $U \leq_{\mathrm{T}} V$.

Proposizione

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $U \leq_{\mathrm{RK}} V$;
2. *esistono* $Y \in V$ *e un omomorfismo completo* $h\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(Y)$ *tali che* $U = h^{-1}[V]$;
3. *per ogni struttura* $\mathfrak{M}$, *esiste un'immersione elementare* $\mathfrak{M}^A/U \to \mathfrak{M}^A/V$.

Una formulazione algebrica

Dato $b \in \mathbb{B}$, denotiamo $\mathbb{B} \restriction b = \{a \in \mathbb{B} \mid a \leq b\}$.

Una formulazione algebrica

Dato $b \in \mathbb{B}$, denotiamo $\mathbb{B} \restriction b = \{a \in \mathbb{B} \mid a \leq b\}$.

Definizione (Murakami [1999])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$.
Definiamo $U \leq_{\mathrm{M}} V$ se e solo se esistono $v \in V$ e un omomorfismo completo $h\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B} \restriction v$ tali che $U = h^{-1}[V]$.

Una formulazione model-teoretica

Una formulazione model-teoretica

Definizione (Jipsen, Pinus, e Rose [2001])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathsf{JPR}} V$ se e solo se esistono una funzione $g\colon \mathrm{Part}(\mathbb{B}) \to \mathrm{Part}(\mathbb{B})$ e, per ogni $A \in \mathrm{Part}(\mathbb{B})$, una funzione $f_A\colon g(A) \to A$ tali che:

Una formulazione model-teoretica

Definizione (Jipsen, Pinus, e Rose [2001])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$.
Definiamo $U \leq_{\mathrm{JPR}} V$ se e solo se esistono una funzione $g\colon \operatorname{Part}(\mathbb{B}) \to \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e, per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$, una funzione $f_A\colon g(A) \to A$ tali che:

1. per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e ogni $X \subseteq A$

$$\bigvee X \in U \iff \bigvee f_A^{-1}[X] \in V;$$

Una formulazione model-teoretica

Definizione (Jipsen, Pinus, e Rose [2001])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathsf{JPR}} V$ se e solo se esistono una funzione $g\colon \operatorname{Part}(\mathbb{B}) \to \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e, per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$, una funzione $f_A\colon g(A) \to A$ tali che:

1. per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e ogni $X \subseteq A$

$$\bigvee X \in U \iff \bigvee f_A^{-1}[X] \in V;$$

2. se A' è più fine di A, allora il valore booleano $[\![f_{A'} \leq f_A]\!]^{\mathbb{B}} \in V$.

Una formulazione model-teoretica

Definizione (Jipsen, Pinus, e Rose [2001])

Siano U e V ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$. Definiamo $U \leq_{\mathsf{JPR}} V$ se e solo se esistono una funzione $g \colon \operatorname{Part}(\mathbb{B}) \to \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e, per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$, una funzione $f_A \colon g(A) \to A$ tali che:

1. per ogni $A \in \operatorname{Part}(\mathbb{B})$ e ogni $X \subseteq A$
$$\bigvee X \in U \iff \bigvee f_A^{-1}[X] \in V;$$
2. se A' è più fine di A, allora il valore booleano $[\![f_{A'} \leq f_A]\!]^{\mathbb{B}} \in V$.

Teorema (Jipsen, Pinus, and Rose [2001])

$U \leq_{\mathsf{JPR}} V$ se e solo se per ogni struttura $\mathfrak{M}$ esiste un'immersione elementare di ultrapotenze booleane $\mathfrak{M}^{[\mathbb{B}]}/U \to \mathfrak{M}^{[\mathbb{B}]}/V$.

La relazione con l'ordine di Tukey

Proposizione

Se U e V sono ultrafiltri su un'algebra di Boole completa $\mathbb{B}$, allora

$$
\begin{tikzcd}
 & U \leq_{\mathsf{M}} V \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
U \leq_{\mathsf{JPR}} V & & U \leq_{\mathsf{T}} V
\end{tikzcd}
$$

Ultrafiltri JPR-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Sia $\mathbb{B}$ *un algebra di Boole completa infinita. Se esiste un'anticatena* A *tale che* $2^{|A|} = |\mathbb{B}|$*, allora esistono due ultrafiltri* U *e* V *su* $\mathbb{B}$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{T}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{JPR}} U$*.*

Ultrafiltri JPR-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Sia $\mathbb{B}$ *un algebra di Boole completa infinita. Se esiste un'anticatena* A *tale che* $2^{|A|} = |\mathbb{B}|$, *allora esistono due ultrafiltri* U *e* V *su* $\mathbb{B}$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{T}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{JPR}} U$.

Idea della dimostrazione.

Costruire U e V per ricorsione transfinita di lunghezza $|\mathbb{B}|$, usando la tecnica di insiemi indipendenti di Kunen [1972]. $\square$

Ultrafiltri Tukey-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*, allora esistono due ultrafiltri* U *and* V *su* $\mathbb{C}_\omega$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{T}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{T}} U$*.*

Ultrafiltri Tukey-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*, allora esistono due ultrafiltri* U *and* V *su* $\mathbb{C}_\omega$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{T}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{T}} U$*.*

Idea della dimostrazione.

Vogliamo costruire U e V per ricorsione transfinita di lunghezza $\aleph_1$.
Tuttavia, a priori abbiamo $2^{\aleph_1}$ riduzioni di Tukey da gestire!

Ultrafiltri Tukey-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*, allora esistono due ultrafiltri* U *and* V *su* $\mathbb{C}_\omega$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{T}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{T}} U$*.*

Idea della dimostrazione.

Vogliamo costruire U e V per ricorsione transfinita di lunghezza $\aleph_1$. Tuttavia, a priori abbiamo $2^{\aleph_1}$ riduzioni di Tukey da gestire! Soluzione:

- assicurarsi che U e V siano P-ultrafiltri coerenti, una proprietà introdotta da Starý [2015];

Ultrafiltri Tukey-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *allora esistono due ultrafiltri* U *and* V *su* $\mathbb{C}_\omega$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{T}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{T}} U$.

Idea della dimostrazione.

Vogliamo costruire U e V per ricorsione transfinita di lunghezza $\aleph_1$. Tuttavia, a priori abbiamo $2^{\aleph_1}$ riduzioni di Tukey da gestire! Soluzione:

- assicurarsi che U e V siano P-ultrafiltri coerenti, una proprietà introdotta da Starý [2015];
- generalizzando Dobrinen and Todorčević [2011], dimostrare che, se U è un P-ultrafiltro coerente su $\mathbb{C}_\omega$, allora ogni potenziale riduzione di Tukey $V \to U$ è determinata da informazione finita, in particolare ne esistono al più $2^{\aleph_0}$;

Ultrafiltri Tukey-incomparabili

Teorema (Brendle e P.)

Se $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *allora esistono due ultrafiltri* U *and* V *su* $\mathbb{C}_\omega$ *tali che* $U \equiv_{\mathsf{JPR}} V$ *e* $U \not\leq_{\mathsf{T}} V$ *e* $V \not\leq_{\mathsf{T}} U$.

Idea della dimostrazione.

Vogliamo costruire U e V per ricorsione transfinita di lunghezza $\aleph_1$. Tuttavia, a priori abbiamo $2^{\aleph_1}$ riduzioni di Tukey da gestire! Soluzione:

- assicurarsi che U e V siano P-ultrafiltri coerenti, una proprietà introdotta da Starý [2015];
- generalizzando Dobrinen and Todorčević [2011], dimostrare che, se U è un P-ultrafiltro coerente su $\mathbb{C}_\omega$, allora ogni potenziale riduzione di Tukey $V \to U$ è determinata da informazione finita, in particolare ne esistono al più $2^{\aleph_0}$;
- procedere con cautela per preservare la JPR-equivalenza ad ogni passo induttivo. $\square$

Sommario

- Ordine di Tukey;
- L'esistenza di ultrafiltri non massimali;
- Due formulazioni dell'ordine di Rudin-Keisler.